

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт ядерных исследований
Российской академии наук

На правах рукописи

Молокоедов Виктор Сергеевич

**Эффекты высших поправок теории возмущений в КХД и
их теоретические и феноменологические следствия**

01.04.02 – Теоретическая физика

*Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук*

Научный руководитель
доктор ф.-м. н.,
А. Л. Катаев

Москва 2020

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Физические величины в различных схемах перенормировок в КХД	11
1.1. Функция Адлера e^+e^- аннигиляции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме	11
1.2. R -отношение e^+e^- аннигиляции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме	14
1.3. Правило сумм Бьёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах	16
1.4. Статический потенциал кварк–антикварковой пары	20
1.5. Рассмотрение эффективной V -схемы	28
1.6. Рассмотрение mMOM-схемы импульсных вычитаний	38
1.7. Поведение рядов теории возмущений для $D(Q^2)$, $R(s)$ и $C_{Vjp}(Q^2)$ функций в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схемах	46
1.8. Квантовоэлектродинамический предел	53
Глава 2. Обобщённое соотношение Крютера	59
2.1. Введение к главе	59
2.2. Схемная зависимость обобщённого соотношения Крютера в КЭД	64
2.3. Схемная и калибровочная зависимость обобщённого соотношения Крютера в КХД	67
Глава 3. Соотношение между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в КХД и его асимптотическая структура	79
3.1. Введение к главе	79
3.2. Применение метода наименьших квадратов	87
3.3. Применение процедуры эффективных зарядов и $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношение	90
3.4. Сравнение с ренормалонными оценками	103
Заключение	109
Список сокращений	111
Приложение А.	112
Приложение Б.	115

Приложение В.	116
Приложение Г.	118
Список литературы	121

Введение

Актуальность работы

При проведении прецизионных измерений на ускорителях частиц и при поиске проявлений физических процессов, лежащих вне рамок Стандартной модели, крайне актуальными оказываются теоретические исследования, в основе которых лежат вычисления пертурбативных вкладов в физические величины в высших порядках теории возмущений (ТВ) [1–5]. Общепринятой теорией для описания пертурбативных и непертурбативных процессов сильного взаимодействия в настоящее время является квантовая хромодинамика (КХД), базирующаяся на представлении о кварках и глюонах, как о составных частях адронов [4–7]. Ключевым моментом при создании КХД как неабелевой теории поля [8] с калибровочной группой $SU(3)$ явилось введение дополнительного квантового числа — цвета [9, 10], которым обладают как кварки, так и глюоны — переносчики сильного взаимодействия. Требование инвариантности лагранжиана относительно локальных калибровочных преобразований цветовой группы $SU(3)$ привело к построению существенно нелинейной теории сильных взаимодействий с самодействием глюонов. Данное обстоятельство коренным образом отличает абелеву квантовую электродинамику (КЭД) от КХД. Действительно, наличие нелинейных по полям слагаемых в лагранжиане КХД приводит, например, к асимптотической свободе [11, 12], согласно которой с уменьшением расстояния эффективная константа связи КХД логарифмически убывает. Этот факт влечёт за собой вывод о том, что на малых расстояниях (много меньших электромагнитного радиуса протона $\sim 10^{-13}$ см) кварки становятся практически свободными, что способствует хорошему описанию процессов в ультрафиолетовой области энергий при помощи теории возмущений. В инфракрасной области энергий теория выходит из режима слабой связи, что сказывается на невозможности применения ТВ по константе связи. На практике теорией возмущений в КХД пользуются при энергиях $\gtrsim 1$ ГэВ.

Спецификой теории сильных взаимодействий также является конфайнмент цвета, т.е. невозможность вылетания свободных кварков и глюонов из адронной материи. Данное явление качественно согласуется с существенным ростом константы связи КХД в области малых энергий. Сильное взаимодействие на больших расстояниях становится столь значительным, что кварки и глюоны остаются “запертыми” внутри адронов, а при распадах последних образующиеся кварки и глюоны достаточно быстро адронизируются, т.е. превращаются в наблюдаемые бесцветные адронные состояния. К сожалению, в настоящее время проблема строгого описания данной стадии, на которой из цветных кварков и глюонов формируются адроны, до сих пор не решена. Исследование этой задачи в непертурбативной области конфайнмен-

та требует умения адекватного описания низкоэнергетических взаимодействий кварков. Для исследования подобных аспектов сильного взаимодействия применяются вычисления на решётке [13], описание при помощи киральной теории возмущений (см. например [4], а также обзор [14]), феноменологические потенциальные модели [15], методы КХД правил сумм с учётом ненулевых конденсатов кварковых и глюонных полей [16], отражающих нетривиальность вакуума КХД, и прочие подходы.

Диссертация посвящена изучению эффектов КХД и КЭД, проявляющихся в физических величинах в области энергий, где оказываются справедливыми расчёты, выполненные в рамках ТВ. С начала 60-70-х годов предсказания КХД успешно прошли целую серию проверок при сравнении с результатами экспериментов по глубоконеупругому рассеянию электронов на протонах и ядрах (SLAC), в процессе электрон–позитронной аннигиляции в адроны (SLAC, DESY, ИЯФ, CERN, KEK, BEPC), в протон–протонных (Протвино, CERN, BNL) и протон–антипротонных (Fermilab) столкновениях на встречных пучках и проч. Исследования этих процессов ведутся и поныне с целью улучшения точности полученных ранее экспериментальных данных. Более того, в будущем возможно строительство международного линейного e^+e^- коллайдера высоких энергий, приоритетной задачей которого будет поиск возможного проявления эффектов новой физики вне рамок Стандартной модели.

Применение процедуры перенормировки делает поправки высших порядков теории возмущений к физическим величинам зависимыми от выбора схем вычитаний ультрафиолетовых расходимостей и специфических конечных перенормировок [1, 2, 5]. Данные эффекты играют важную роль при сравнении теоретических пертурбативных предсказаний с результатами прецизионных экспериментальных данных. В связи с этим в настоящей работе, в частности, изучается схемная и калибровочная зависимость R -отношения процесса однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны. Результаты данных исследований могут быть полезными для детализации оценки теоретических неопределённостей при сравнении с экспериментальными данными существующих и будущих измерений. Проводится изучение зависимости коэффициентной функции правила сумм Бьёркена глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах (см. [17] и обзор [18]) от выбора схемы перенормировки (в том числе и в случае калибровочно–неинвариантных схем). Это может позволить осуществить детализованное сравнение теоретических результатов с недавними экспериментальными данными коллаборации COMPASS (CERN) по исследованию спиновой структуры нуклонов (ядер).

Затронутые в диссертации вопросы, посвящённые анализу асимптотического поведения соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков [19–22], могут в на-

стоящее время представлять определённый интерес в связи с извлечением этих масс c и b -кварков с большой точностью, например, из данных по измерению масс связанных состояний $c\bar{c}$ и $b\bar{b}$ -систем (см. например [23, 24]), и в связи с результатами определения полюсных и бегущих масс t -кварка из данных коллабораций CMS и ATLAS Большого Адронного Коллайдера.

Основные цели работы

Настоящая работа посвящена изучению схемной (в КХД и КЭД) и калибровочной (в КХД) зависимости характеристик процессов рождения адронов в электрон–позитронной аннигиляции и глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованной нуклонной мишени, а также обобщённого соотношения Крютера, устанавливающего фундаментальную связь между соответствующими ренорминвариантными величинами, характеризующими описанные процессы. В качестве основных схем, отличных от MS-подобных схем минимальных вычитаний, рассмотрены калибровочно-инвариантная V-схема, определяемая высшими поправками к статическому кулоновскому потенциалу КХД (КЭД), и тесно связанная с ней (как следует из результатов диссертации) калибровочно-неинвариантная минимальная схема импульсных вычитаний mMOM (сокращение от miniMOM), ранее используемая в литературе, в частности, в расчётах, выполненных на решётке. Исследуется асимптотическое поведение рядов теории возмущений для отношения полюсной и бегущей массы тяжёлых кварков в КХД. Для достижения целей в диссертации были выделены следующие задачи:

1. Получить аналитические выражения для коэффициентов рядов теории возмущений функции Адлера и R -отношения однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны, а также функции Бьёркена правила сумм глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в $SU(N_c)$ КХД в V и mMOM-схеме в четырёхпетлевом приближении. Совершив предельный переход к калибровочной группе $U(1)$, исследовать структуру рядов ТВ для вышеупомянутых функций и выявить связь и различие между КЭД β -функцией в V-схеме и в схеме импульсных вычитаний.
2. Исследовать схемную зависимость обобщённого соотношения Крютера. В классе схем импульсных вычитаний (включающих mMOM-схему) в КХД определить, существуют ли выделенные значения калибровочного параметра ξ , при которых будет сохраняться факторизация β -функции в члене, нарушающем конформную симметрию безмассовой КХД и входящем в рассматриваемое соотношение.
3. Определить численные значения двух неизвестных в аналитическом виде коэффициентов, входящих в разложение поправки четвёртого порядка к соотношению между

полюсными и бегущими в $\overline{\text{MS}}$ -схеме массами тяжёлых кварков по степеням числа ароматов безмассовых кварков n_l . Проанализировать структуру и поведение рядов теории возмущений для этого соотношения вплоть до 6-го порядка.

Положения, выносимые на защиту

1. Получены аналитические выражения для вышеупомянутых функций Адлера, Бьёркена и R -отношения в калибровочно-инвариантной V -схеме и в неинвариантной $m\text{MOM}$ -схеме в четырёхпетлевом приближении в $SU(N_c)$ КХД. Показано уменьшение схемной и калибровочной зависимости рядов теории возмущений исследуемых физических величин при переходе от 2-го к 4-му порядку ТВ. Предельный переход к случаю КЭД позволяет выявить, что β -функция в V -схеме совпадает с Ψ -функцией Гелл-Манна–Лоу на трёхпетлевом уровне, и начинает от неё отличаться с 4-го порядка на поправку, связанную с проявлением эффектов рассеяния света на свете в трёхпетлевом вкладе к статическому кулоновскому потенциалу.
2. Показано, что в КЭД помимо $\overline{\text{MS}}$ -схемы обобщённое соотношение Крютера выполняется на четырёхпетлевом уровне также и в схеме импульсных вычитаний MOM , и в схеме вычитаний на массовой поверхности. Установлена справедливость данного соотношения в V -схеме в КХД в том же приближении по теории возмущений. Выявлена факторизация КХД β -функции в члене, нарушающем конформную симметрию и входящем в рассматриваемое соотношение, в классе схем импульсных вычитаний в третьем порядке ТВ при $\xi = 0, -3$ и при $\xi = 0$ в четвёртом. Демонстрируется, что, если данное обобщённое соотношение будет справедливым в $\overline{\text{MS}}$ -схеме во всех порядках ТВ, то оно также будет верным во всех порядках и в MOM -подобных схемах в КХД в калибровке Ландау. Делается вывод, что калибровочная инвариантность схем перенормировок является достаточным, но не является необходимым условием для факторизации β -функции в обобщённом соотношении Крютера в КХД.
3. При помощи метода наименьших квадратов определены численные значения двух неизвестных в аналитическом виде четырёхпетлевых коэффициентов в соотношении между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков. Продемонстрирована устойчивость найденных значений по отношению к изменению числа уравнений и неизвестных в рассматриваемой переопределённой системе, к которой применяется метод наименьших квадратов. Исследовано поведение рядов теории возмущений для данного соотношения в высших порядках и показано, что в случае с b -кварком его асимптотический

характер проявляется, начиная с 4-го порядка ТВ, а для t -кварка не проявляется даже на шестипетлевом уровне.

Научная новизна

1. Демонстрируется, что в КЭД β -функция в V -схеме начинает отличаться от Ψ -функции Гелл-Манна–Лоу в схеме импульсных вычитаний МОМ лишь с 4-го порядка теории возмущений на поправку, связанную с проявлением эффектов рассеяния света на свете в трёхпетлевом вкладе к статическому кулоновскому потенциалу. Это обстоятельство позволяет заключить, что в КЭД V -схему можно рассматривать как аналог МОМ-схемы.
2. Впервые рассмотрено обобщённое соотношение Крютера в калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок в КХД и доказана его справедливость в калибровке Ландау в классе схем импульсных вычитаний на четырёхпетлевом уровне. Показано, что, если данное соотношение будет выполняться в \overline{MS} -схеме во всех порядках ТВ, то калибровочная инвариантность схем перенормировок будет являться достаточным, но не являться необходимым условием наличия факторизации $\beta(a_s)$ -функции в конформно-нарушающем члене этого соотношения также во всех порядках.
3. Отмечено, что асимптотическая структура в соотношении между полюсной и бегущей массой проявляется для b -кварка, начиная с четырёхпетлевого уровня, а для t -кварка не наблюдается даже в шестом порядке теории возмущений. В связи с этим делается вывод, что в современных прецизионных исследованиях целесообразнее использовать понятие не полюсной массы b -кварка, а бегущей. При этом для t -кварка применимы оба эти понятия при параметризации его массы вплоть до 6-го (и по всей видимости до 8-го) порядка теории возмущений.

Практическая значимость

Тематика, связанная с изучением e^+e^- аннигиляции в адроны, продолжает привлекать интерес физиков в связи с возможностью извлечения дополнительной информации о полном сечении данного процесса и исследования свойств возникающих резонансов из экспериментальных данных ускорителей в Новосибирске (Россия), Китае и В-фабрики в Японии. Изучаемая в диссертации схемная и калибровочная зависимость R -отношения может быть полезной для детализации оценки теоретических неопределённостей при сравнении с данными имеющихся и возможных будущих экспериментов по измерению полного сечения этого процесса, которые быть получены при изучении столкновений электрон–позитронных пучков на планируемой для создания супер чарм-тау фабрике в Новосибирске.

Представленные в данной работе результаты для соотношения между полюсной и бегущей массой тяжёлого t -кварка могут вызывать определённый интерес как теоретиков, так и экспериментаторов, извлекающих значения этих масс, например, из экспериментальных данных по исследованию процессов с участием топ-кварка в протон–протонных соударениях (CMS и ATLAS, CERN).

Методология и методы исследования

В диссертации используются подходы квантовой теории поля, в частности, методы ренормгруппового анализа и теории перенормировок. Рассматриваются различные теоретические процедуры оценок многопетлевых вкладов к физическим величинам. Применяются математические подходы, такие как метод наименьших квадратов, используемый в данной работе для решения переопределённых систем алгебраических уравнений, а также некоторые аспекты теории специальных функций.

Степень достоверности полученных результатов

Частные случаи ряда полученных результатов согласуются с ранее представленными в литературе, а отдельные результаты были впоследствии подтверждены независимыми расчётами. Достоверность результатов, определённых при помощи метода наименьших квадратов, подтверждается их устойчивостью по отношению к изменению числа уравнений в рассматриваемой переопределённой системе и к вариации числа входящих в неё неизвестных. Приведённые оценки для пятипетлевой поправки к соотношению между полюсной и бегущей массой b -кварка согласуются (с фактором порядка 2) с независимыми оценками, имеющимися в научной литературе.

Основные публикации по теме диссертации

По материалам диссертации опубликовано 8 работ [25–32], из которых 5 в рецензируемых международных изданиях, рекомендуемых ВАК.

Апробация работы

Результаты работы были доложены на следующих российских и международных семинарах и конференциях:

1. 62-я Всероссийская научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 18-23 ноября 2019
2. Международный семинар “Calculations for Modern and Future Colliders (CALC-2018)”, ОИЯИ, Дубна, 22 июля - 1 августа 2018
3. 20-й международный семинар по физике высоких энергий “Кварки-2018”, 27 мая – 2 июня 2018 года, Валдай, РФ

4. XXV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2018”, Москва, 9-13 апреля 2018, МГУ
5. 60-я международная научная конференция МФТИ, Долгопрудный, 20-26 ноября 2017
6. XXIV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов-2017”, Москва, 10-14 апреля 2017, МГУ
7. Молодёжная конференция по физике высоких энергий, квантовой теории поля, математической физике и космологии; 18-19 апреля 2016, МФТИ (ГУ), Долгопрудный
8. Молодёжная межинститутская конференция “Физика элементарных частиц и космология”, 12-13 ноября 2014, Москва, ИЯИ РАН

Доклад по теме диссертации был представлен на научном семинаре отдела теоретической физики ИЯИ РАН (Москва).

Личный вклад

Все результаты, изложенные в работе и выносимые на защиту, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Объём работы составляет 135 страниц, включая 8 рисунков и 7 таблиц. Список литературы насчитывает 228 наименований.

Физические величины в различных схемах перенормировок в КХД

1.1. Функция Адлера e^+e^- аннигиляции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме

При изучении высших поправок теории возмущений к таким физически важным величинам, как сечение аннигиляции электрон-позитронной пары в адроны, инклюзивные адронные распады Z -бозона, τ -лептона и бозона Хиггса, весьма полезными и эффективными с точки зрения вычислений оказываются понятия двухточечных функций кварковых (векторных, аксиально-векторных или скалярных) токов. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением функции Адлера однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны, связанной со скалярным формфактором $\Pi(q^2)$ вакуумного поляризационного тензора векторных токов

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle, \quad (1.1)$$

$$D(Q^2) = -12\pi^2 Q^2 \frac{d\Pi(Q^2)}{dQ^2}, \quad (1.2)$$

где функция Адлера $D(Q^2)$ определяется в евклидовой области энергий с пространственноподобной кинематической переменной $Q^2 = -q^2 > 0$. Синглетный по аромату векторный адронный электромагнитный ток в выражении (1.1) определяется стандартным образом $j_\mu = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f$, где суммирование производится по ароматам кварков с соответствующим значением электрического заряда Q_f . Функция $\Pi(q^2)$ является аналитической функцией с особенностями вдоль положительной вещественной полуоси (точнее, начиная с порога рождения адронных состояний $q^2 \geq 4m_\pi^2$), что позволяет использовать дисперсионные соотношения для $\Pi(q^2)$.

В рамках теории возмущений в безмассовой КХД функция Адлера имеет следующий вид:

$$D(a_s(Q^2)) = d_R \left(\sum_f Q_f^2 D^{NS}(a_s(Q^2)) + \left(\sum_f Q_f \right)^2 D^{SI}(a_s(Q^2)) \right). \quad (1.3)$$

Здесь индексами NS и SI обозначаются несинглетные и синглетные вклады в $D(a_s(Q^2))$ соответственно; d_R — размерность фундаментального представления алгебры Ли цветовой группы $SU(N_c)$, которая тождественна количеству кварковых цветов N_c ; $a_s = \alpha_s/\pi$ и $\alpha_s = g_s^2/4\pi$ — константа связи КХД, под которой в дальнейшем мы будем понимать перенормированную константу связи, определённую в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [33], которая является модификацией

схемы минимальных вычитаний ультрафиолетовых (УФ) расходимостей [34], найденных при помощи размерной регуляризации [35].

Хорошо известный борновский фактор $d_R \sum_f Q_f^2$ в (1.3) был впервые получен в работах [36, 37]. Данное теоретическое предсказание согласуется с экспериментальными проверками КХД при $d_R = N_c = 3$, что соответствует трём цветам кварков.

Вычисленная по ТВ несинглетная часть функции Адлера представима в виде ряда по степеням константы связи КХД:

$$D^{NS}(a_s(Q^2)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{NS} a_s^k(Q^2). \quad (1.4)$$

Однопетлевой коэффициент $d_1^{NS} = 3C_F/4$ был вычислен в [38, 39]. Здесь C_F — квадратичный оператор Казимира в фундаментальном представлении группы $SU(N_c)$: $(T^a T^a)_{ij} = C_F \delta_{ij}$, $T^a = \lambda^a/2$ есть $N_A = (N_c^2 - 1)$ генераторов алгебры Ли рассматриваемой калибровочной группы унитарных унимодулярных матриц, подчиняющихся стандартным коммутационным соотношениям $[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$ с нормировкой $\text{Tr}(T^a T^b) = T_F \delta^{ab}$, $T_F = 1/2$ — индекс Дынкина. В присоединённом представлении квадратичный оператор Казимира мы будем обозначать как C_A : $f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}$. Используя соотношение полноты для генераторов группы $SU(N_c)$ в фундаментальном представлении $2T_{ij}^a T_{kl}^a = \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kl}/N_c$, можно получить формулы, связывающие оператор Казимира с количеством рассматриваемых в данной модели цветов N_c :

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad C_A = N_c. \quad (1.5)$$

Удобство представления конечных результатов вычислений в терминах операторов Казимира состоит в том, что без особого труда можно перейти к другой группе симметрии лагранжиана, например, к случаю КЭД с унитарной калибровочной группой $U(1)$.

Двух, трёх и четырёхпетлевые поправки к несинглетному вкладу в функцию Адлера в $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировок были найдены в работах [40–42], [43, 44], [45, 46] соответственно. Позднее $\mathcal{O}(a_s^4)$ результаты были проверены в [47]. Для дальнейших целей нам будет удобно процитировать результаты этих вычислений в явном аналитическом виде:

$$d_2^{NS} = -\frac{3}{32} C_F^2 + \left(\frac{123}{32} - \frac{11}{4} \zeta_3 \right) C_F C_A + \left(-\frac{11}{8} + \zeta_3 \right) C_F T_F n_f, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} d_3^{NS} &= -\frac{69}{128} C_F^3 + \left(-\frac{127}{64} - \frac{143}{16} \zeta_3 + \frac{55}{4} \zeta_5 \right) C_F^2 C_A \\ &+ \left(\frac{90445}{3456} - \frac{2737}{144} \zeta_3 - \frac{55}{24} \zeta_5 \right) C_F C_A^2 - \left(\frac{29}{64} - \frac{19}{4} \zeta_3 + 5 \zeta_5 \right) C_F^2 T_F n_f \\ &+ \left(-\frac{485}{27} + \frac{112}{9} \zeta_3 + \frac{5}{6} \zeta_5 \right) C_F C_A T_F n_f + \left(\frac{151}{54} - \frac{19}{9} \zeta_3 \right) C_F T_F^2 n_f^2, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
d_4^{NS} = & \left(\frac{4157}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3 \right) C_F^4 - \left(\frac{253}{32} + \frac{139}{128}\zeta_3 - \frac{2255}{32}\zeta_5 + \frac{1155}{16}\zeta_7 \right) C_F^3 C_A \quad (1.8) \\
& + \left(-\frac{592141}{18432} - \frac{43925}{384}\zeta_3 + \frac{6505}{48}\zeta_5 + \frac{1155}{32}\zeta_7 \right) C_F^2 C_A^2 \\
& + \left(\frac{52207039}{248832} - \frac{456223}{3456}\zeta_3 - \frac{77995}{1152}\zeta_5 + \frac{605}{32}\zeta_3^2 - \frac{385}{64}\zeta_7 \right) C_F C_A^3 \\
& + \left(\frac{1001}{384} + \frac{99}{32}\zeta_3 - \frac{125}{4}\zeta_5 + \frac{105}{4}\zeta_7 \right) C_F^3 T_F n_f + \left(\frac{5713}{1728} - \frac{581}{24}\zeta_3 \right. \\
& + \left. \frac{125}{6}\zeta_5 + 3\zeta_3^2 \right) C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \left(-\frac{6131}{972} + \frac{203}{54}\zeta_3 + \frac{5}{3}\zeta_5 \right) C_F T_F^3 n_f^3 \\
& + \left(\frac{32357}{13824} + \frac{10661}{96}\zeta_3 - \frac{5155}{48}\zeta_5 - \frac{33}{4}\zeta_3^2 - \frac{105}{8}\zeta_7 \right) C_F^2 C_A T_F n_f \\
& + \left(-\frac{4379861}{20736} + \frac{8609}{72}\zeta_3 + \frac{18805}{288}\zeta_5 - \frac{11}{2}\zeta_3^2 + \frac{35}{16}\zeta_7 \right) C_F C_A^2 T_F n_f \\
& + \left(\frac{340843}{5184} - \frac{10453}{288}\zeta_3 - \frac{170}{9}\zeta_5 - \frac{1}{2}\zeta_3^2 \right) C_F C_A T_F^2 n_f^2 \\
& + \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\zeta_3 - \frac{5}{4}\zeta_5 \right) \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{d_R} + \left(-\frac{13}{16} - \zeta_3 + \frac{5}{2}\zeta_5 \right) \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{d_R} n_f,
\end{aligned}$$

где n_f — число активных ароматов кварков, $\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$ — дзета-функция Римана, d_F^{abcd} и d_A^{abcd} — полностью симметричные по перестановкам индексов цветковые инварианты ранга четыре, определённые следующим образом: $d_F^{abcd} = \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d)/6$, $d_A^{abcd} = \text{Tr}(C^a C^b C^c C^d)/6$, где $(C^a)_{bc} = -if^{abc}$ — генераторы присоединённого представления. В общем случае подобные симметричные цветковые структуры определяются суммой по всем перестановкам $\pi(n)$ индексов как $d^{a_1 \dots a_n} = \sum_{\pi} \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_{\pi(1)}} \dots T^{a_{\pi(n)}})/n!$. С помощью написанного выше соотношения полноты для генераторов группы $SU(N_c)$ можно получить следующие тождества:

$$\begin{aligned}
\frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} &= \frac{N_c^4 - 6N_c^2 + 18}{96N_c^2}, & \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} &= \frac{N_c(N_c^2 + 6)}{48}, \\
\frac{d_A^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} &= \frac{N_c^2(N_c^2 + 36)}{24}.
\end{aligned} \quad (1.9)$$

Синглетная часть функции $D(a_s)$ (1.3) появляется, начиная с трёхпетлевого уровня ТВ, благодаря специфическим вкладам типа рассеяния света на свете [43]. Характерные диаграммы, дающие вклады в несинглетную и синглетную части функции $D(a_s)$, приведены на Рис. 1.1.

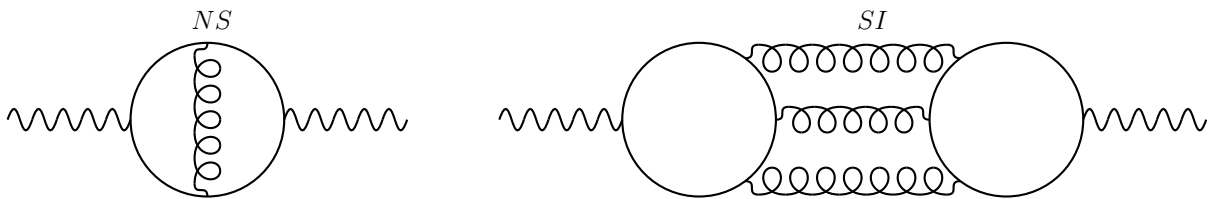


Рис. 1.1: Слева представлена диаграмма несинглетного типа, а справа синглетного.

Трёх и четырёхпетлевые синглетные вклады были вычислены в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в работах [43, 48] соответственно. Эти результаты выглядят следующим образом:

$$D^{SI}(a_s(Q^2)) = \sum_{k=3}^{\infty} d_k^{SI} a_s^k(Q^2), \quad (1.10)$$

$$d_3^{SI} = \left(\frac{11}{192} - \frac{\zeta_3}{8} \right) \frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R}, \quad (1.11)$$

$$d_4^{SI} = \left[\left(-\frac{13}{64} - \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{8}\zeta_5 \right) C_F + \left(\frac{3893}{4608} - \frac{169}{128}\zeta_3 - \frac{11}{32}\zeta_3^2 + \frac{45}{64}\zeta_5 \right) C_A \right. \\ \left. + \left(-\frac{149}{576} + \frac{13}{32}\zeta_3 - \frac{5}{16}\zeta_5 + \frac{\zeta_3^2}{8} \right) T_F n_f \right] \frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R}. \quad (1.12)$$

В отличие от несинглетного вклада $D^{SI}(a_s)$ пропорционален $d^{abc} d^{abc}/d_R$ структуре с цветовой константой d^{abc} , симметричной по всем индексам. Для случая $SU(N_c)$ группы данная свёртка подчиняется соотношению $d^{abc} d^{abc}/d_R = (N_c^2 - 4)(N_c^2 - 1)/N_c^2$. Интересной особенностью синглетной поправки является тот факт, что она тождественно равна нулю для случая $n_f = 3$, поскольку фактор $\sum_f Q_f = 0$ в выражении (1.3).

В заключении данного раздела отметим, что помимо пертурбативных вкладов в поляризационном операторе $\Pi(Q^2)$ содержатся существенно непертурбативные, явный вид которых может быть получен в глубоковеклидовой области при помощи операторного разложения, применённого к двухточечному коррелятору в уравнении (1.1). К примеру, лидирующая непертурбативная поправка к $\Pi(Q^2)$ пропорциональна вкладу глюонного конденсата $\langle \alpha_s / \pi G_{\mu\nu}^a G^{a, \mu\nu} \rangle / Q^4$ [16], значение которого первоначально извлекалось из правил сумм в адронной спектроскопии. В случае ненулевой массы лёгких кварков также следует учитывать кварковый конденсат $m \langle \bar{\psi} \psi \rangle / Q^4$. Данные непертурбативные эффекты взаимодействия кварков и глюонов с физическим вакуумом КХД важны при описании низкоэнергетических процессов. В данной работе мы не будем их рассматривать, а ограничимся учётом поправок, вычисленных по теории возмущений, влияние которых доминирует в рассматриваемой нами области больших энергий.

1.2. R -отношение e^+e^- аннигиляции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме

Перейдем теперь к изучению непосредственно измеряемой в экспериментах характеристики электрон–позитронной аннигиляции в адроны, называемой $R(s)$ -отношением. Данная величина определена во времениподобной Минковской области энергий $s > 0$ и может быть выражена через мнимую часть скалярного формфактора адронных электромагнитных то-

КОВ:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow hadrons)}{\sigma_{Born}(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 12\pi \operatorname{Im} \Pi(s + i\varepsilon), \quad (1.13)$$

где нормировочный фактор $\sigma_{Born}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 4\pi\alpha^2/(3s)$ с константой связи КЭД α .

Пользуясь аналитичностью функции $\Pi(q^2)$ и интегральной формулой Коши, можно получить следующее представление (с учётом разреза вдоль вещественной положительной полуоси) поляризационного оператора через контурный интеграл:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|s|=R} ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} + \int_0^R ds \frac{\Pi(s + i\varepsilon) - \Pi(s - i\varepsilon)}{s - q^2} \right). \quad (1.14)$$

В предположении достаточно быстрого убывания коррелятора токов на бесконечности (например, $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \Pi(s) \sim 1/|s|^\delta$ для любого $\delta > 0$), интеграл по кругу радиуса R в (1.14) исчезает при устремлении $R \rightarrow \infty$, а интеграл по берегам разреза пропорционален мнимой части поляризационного оператора. Для того чтобы полученный интеграл сходился, нужно учесть физическое условие перенормировки $\Pi(0) = 0$, следующее из сохранения векторного тока, и получить дисперсионное соотношение с одним вычитанием [49]

$$\frac{\Pi(Q^2)}{Q^2} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\operatorname{Im} \Pi(s)}{s(s + Q^2)}. \quad (1.15)$$

Используя формулы (1.13) и (1.15), находим соотношение между функцией Адлера и $R(s)$ -отношением:

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2}. \quad (1.16)$$

В явном виде связь коэффициентов $D(Q^2)$ и $R(s)$ -функций можно получить, если учесть эффект бега константы связи в представлении (1.16). За эволюцию последней отвечает ренормгрупповая (РГ) β -функция

$$\beta(a_s) = \mu^2 \frac{\partial a_s}{\partial \mu^2} = - \sum_{i \geq 0} \beta_i a_s^{i+2}, \quad (1.17)$$

где μ — масштабный параметр размерности массы, возникающий непосредственно при применении метода размерной регуляризации [35], когда количество измерений полагают равным $D = 4 - 2\epsilon$.

Первые два коэффициента β -функции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме были получены в работах [11, 12] и [50–52]. Соответствующие выражения для трёх- и четырёхпетлевых коэффициентов β_2 и β_3 известны благодаря вычислениям, выполненным в [53, 54] и [55, 56]. Пятый $\overline{\text{MS}}$ -схемный коэффициент β_4 был вначале найден в аналитическом виде для случая $SU(3)$ -группы в статье

[57], а позже подтверждён вычислениями для более общего случая $SU(N_c)$ -группы с произвольным количеством цветов в работах [58, 59]. Явный вид этих коэффициентов приведён в Приложении А.

Используя формулу (A.7), а также соотношение (1.16), можно получить следующую связь между коэффициентами ряда ТВ для $R(s)$ -отношения и функции Адлера:

$$r_1 = d_1, \quad r_2 = d_2, \quad r_3 = d_3 - \frac{\pi^2}{3}d_1\beta_0^2, \quad r_4 = d_4 - \pi^2\left(d_2\beta_0^2 + \frac{5}{6}d_1\beta_1\beta_0\right). \quad (1.18)$$

Таким образом, отличие между коэффициентами данных функций начинает проявляться с третьего порядка ТВ из-за появления пропорциональных степеням π^2 членов аналитического продолжения из евклидовой области энергий в минковскую. Соотношения, аналогичные (1.18), но с двумя следующими поправками аналитического продолжения приведены в работах [60, 61]. Позднее в статье [62] были найдены подобные “кинематические” слагаемые в ещё более высоких порядках ТВ.

Приведённые эффекты аналитического продолжения не являются пренебрежимо малыми по сравнению с соответствующими коэффициентами функции Адлера [60], а наоборот, доминируют над ними [45, 46]. Однако, данная особенность не является общим правилом. К примеру, в случае распада бозона Хиггса на кварковую пару $b\bar{b}$, ширина которого пропорциональна мнимой части поляризационного оператора двух скалярных адронных токов, также неизбежно возникают члены аналитического продолжения [63]. Эти отрицательные по величине эффекты не являются преобладающими над положительными значениями поправок, вычисленных в области пространственноподобной переменной [64]. Важность учёта подобных π^2 членов была ранее также подчёркнута в работах [65, 66]. В частности, эти эффекты могут быть просуммированы в рамках применения аналитической теории возмущений [61, 67–69].

1.3. Правило сумм Бьёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах

Другой фундаментальной величиной, с которой мы в дальнейшем будем иметь дело, является коэффициентная функция $C_{Bjp}(Q^2)$ правила сумм Бьёркена. Как известно, адронный тензор $W_{\mu\nu}$, входящий в определение дифференциального сечения глубоконеупругого

рассеяния лептонов на нуклонах, может быть параметризован в следующем виде:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(p, q, s) &= \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle p, s | [j_\mu^\dagger(z), j_\nu(0)] | p, s \rangle \\
&= \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{1}{(pq)} \left(p_\mu - \frac{(pq)}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{(pq)}{q^2} q_\nu \right) F_2(x, Q^2) \\
&\quad - i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda q_\rho}{2(pq)} F_3(x, Q^2) + i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\lambda}{(pq)} \left(s^\rho g_1(x, Q^2) + \left(s^\rho - \frac{(sq)}{(pq)} p^\rho \right) g_2(x, Q^2) \right) + \dots,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

где p и s — импульс и поляризация нуклона, $Q^2 = -q^2$, $0 \leq x = Q^2/(2pq) \leq 1$ — бьёркеновская переменная. Структурные функции $F_1(x, Q^2)$ и $F_2(x, Q^2)$ характеризуют процесс глубоконеупругого рассеяния с участием неполяризованных частиц, а $g_1(x, Q^2)$ и $g_2(x, Q^2)$ — с поляризованными. Член с $F_3(x, Q^2)$ необходимо учитывать лишь при обмене W^\pm и Z -бозонами в процессах с рассеянием заряженных лептонов или нейтрино на нуклонах. В разложении (1.19) представлена лишь часть структурных функций.

Применение алгебры токов в области вблизи светового конуса, которая доминирует в процессе глубоконеупругого рассеяния $z^2 \sim 1/Q^2 \rightarrow 0$ при $Q^2 \rightarrow \infty$, приводит к правилам сумм Бьёркена [17, 70]. В случае поляризованных частиц, одно из них определяется интегралом от разности функций $g_1(x, Q^2)$ для протона и нейтрона по всевозможным значениям x :

$$\int_0^1 \left(g_1^{lp}(x, Q^2) - g_1^{ln}(x, Q^2) \right) dx = \frac{1}{6} \left| \frac{g_A}{g_V} \right| C_{Bjp}(a_s(Q^2)), \tag{1.20}$$

где индекс l соответствует конкретному заряженному лептону (e или μ). Структурная функция $g_1^{lp(n)}(x, Q^2)$ характеризует спиновое распределение поляризованных кварков и глюонов внутри нуклонов. Среднее мировое значение отношения аксиального и векторного зарядов β -распада нейтрона равно $g_A/g_V = -1.2723 \pm 0.0023$ [71]. В общем случае правило сумм Бьёркена (1.20) содержит поправки на массы кварков [72, 73], а также непертурбативные поправки высших размерностей порядка $\mathcal{O}(1/Q^2)$, обсуждавшиеся в работах [74–77]. Как и в случае функции Адлера, ограничимся рассмотрением лишь безмассовых пертурбативных поправок к коэффициентной функции Бьёркена $C_{Bjp}(a_s(Q^2))$, которая определяет величину нарушения скейлинга в КХД.

Также отметим, что, например, правило сумм Буркхардта–Коттингэма для функции $g_2(x, Q^2)$ не получает поправок в рамках теории сильных взаимодействий [78–80]:

$$\int_0^1 \left(g_2^{lp}(x, Q^2) - g_2^{ln}(x, Q^2) \right) dx = 0. \tag{1.21}$$

На практике для вычисления поправок к правилу сумм Бьёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах обычно рассматрива-

ют Фурье-образ T -произведения двух векторных адронных несинглетных токов $V_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi$ [81, 82] и применяют к нему технику операторного разложения:

$$T_{\mu\nu}^{ab}(q) = i \int d^4z e^{iqz} T V_\mu^a(z) V_\nu^b(0) \stackrel{|q^2| \rightarrow \infty}{\simeq} C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q) A_\lambda^c(0), \quad (1.22)$$

где ведущий член разложения пропорционален аксиально-векторному току $A_\mu^a = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi$ и структурной функции $C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q)$, которая выражается через коэффициентную функцию Бёркена:

$$C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q) = i d^{abc} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\rho}{q^2} C_{Bjp}(a_s(Q^2)). \quad (1.23)$$

Для нахождения $C_{Bjp}(a_s(Q^2))$ используют метод проектирующего оператора [81, 83], который позволяет непосредственно извлекать искомую структурную функцию из соотношения (1.23):

$$C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q) = -\frac{1}{6} \langle 0 | T(\bar{\psi}(p) \gamma_\lambda \gamma_5 T^c \psi(-p) T_{\mu\nu}^{ab}(q)) | 0 \rangle \Big|_{p=0}, \quad (1.24)$$

где $\psi(p)$ — Фурье-образ кваркового поля.

По аналогии с функцией Адлера, коэффициентная функция Бёркена помимо несинглетных вкладов содержит синглетные:

$$C_{Bjp}(a_s(Q^2)) = C_{Bjp}^{NS}(a_s(Q^2)) + d_R \sum_f Q_f C_{Bjp}^{SI}(a_s(Q^2)). \quad (1.25)$$

Характерные диаграммы обоих типов представлены на Рис. 1.2.

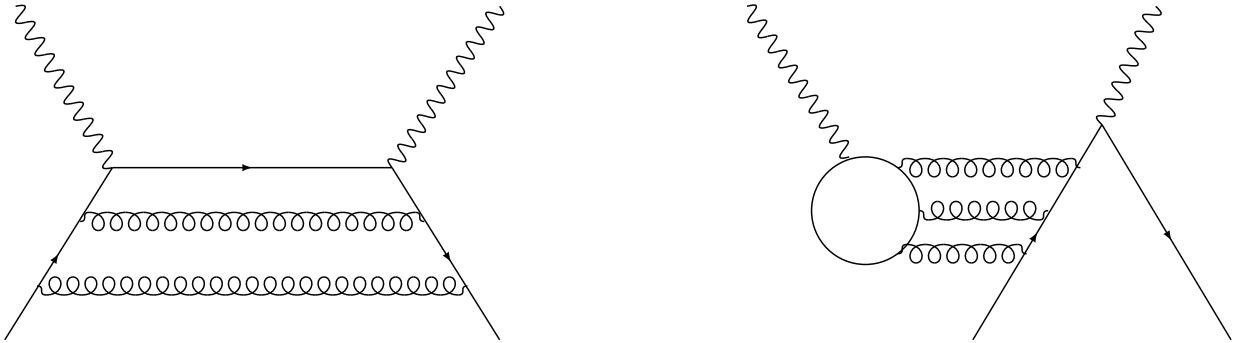


Рис. 1.2: Слева представлена диаграмма несинглетного типа, а справа синглетного.

Подробности вычисления несинглетного вклада $C_{Bjp}^{NS}(a_s(Q^2))$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме на одно-, двух-, трёх- и четырёхпетлевом уровне могут быть найдены в оригинальных работах [78], [81], [82],

[46] соответственно. Цитируем эти результаты для случая $SU(N_c)$ -группы:

$$C_{Bjp}^{NS}(a_s(Q^2)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{NS} a_s^k(Q^2), \quad (1.26)$$

$$c_1^{NS} = -\frac{3}{4}C_F, \quad (1.27)$$

$$c_2^{NS} = \frac{21}{32}C_F^2 - \frac{23}{16}C_F C_A + \frac{1}{2}C_F T_F n_f, \quad (1.28)$$

$$c_3^{NS} = -\frac{3}{128}C_F^3 + \left(\frac{1241}{576} - \frac{11}{12}\zeta_3\right)C_F^2 C_A - \left(\frac{5437}{864} - \frac{55}{24}\zeta_5\right)C_F C_A^2 \quad (1.29)$$

$$- \left(\frac{133}{576} + \frac{5}{12}\zeta_3\right)C_F^2 T_F n_f + \left(\frac{3535}{864} + \frac{3}{4}\zeta_3 - \frac{5}{6}\zeta_5\right)C_F C_A T_F n_f - \frac{115}{216}C_F T_F^2 n_f^2,$$

$$c_4^{NS} = -\left(\frac{4823}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3\right)C_F^4 - \left(\frac{3707}{4608} + \frac{971}{96}\zeta_3 - \frac{1045}{48}\zeta_5\right)C_F^3 C_A \quad (1.30)$$

$$+ \left(\frac{1071641}{55296} + \frac{1591}{144}\zeta_3 - \frac{1375}{144}\zeta_5 - \frac{385}{16}\zeta_7\right)C_F^2 C_A^2 - \left(\frac{8004277}{248832} - \frac{1069}{576}\zeta_3$$

$$- \frac{12545}{1152}\zeta_5 + \frac{121}{96}\zeta_3^2 - \frac{385}{64}\zeta_7\right)C_F C_A^3 + \left(\frac{1238827}{41472} + \frac{59}{64}\zeta_3 - \frac{1855}{288}\zeta_5 + \frac{11}{12}\zeta_3^2$$

$$- \frac{35}{16}\zeta_7\right)C_F C_A^2 T_F n_f - \left(\frac{87403}{13824} + \frac{1289}{144}\zeta_3 - \frac{275}{144}\zeta_5 - \frac{35}{4}\zeta_7\right)C_F^2 C_A T_F n_f$$

$$+ \left(\frac{839}{2304} + \frac{451}{96}\zeta_3 - \frac{145}{24}\zeta_5\right)C_F^3 T_F n_f - \left(\frac{265}{576} - \frac{29}{24}\zeta_3\right)C_F^2 T_F^2 n_f^2$$

$$- \left(\frac{165283}{20736} + \frac{43}{144}\zeta_3 - \frac{5}{12}\zeta_5 + \frac{1}{6}\zeta_3^2\right)C_F C_A T_F^2 n_f^2 + \frac{605}{972}C_F T_F^3 n_f^3$$

$$- \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{4}\zeta_3 - \frac{5}{4}\zeta_5\right)\frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{d_R} + \left(\frac{13}{16} + \zeta_3 - \frac{5}{2}\zeta_5\right)\frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{d_R} n_f.$$

В отличие от функции Адлера, для которой синглетные поправки появлялись, начиная с третьего порядка ТВ, для правила сумм Бьёркена процесса глубококонепругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованной нуклонной мишени аналогичные поправки возникают, начиная с четырёхпетлевого уровня [84]. Их явный вид пропорционален первому схемно-независимому коэффициенту РГ β -функции [85]:

$$C_{Bjp}^{SI}(a_s(Q^2)) = \frac{1}{9}\beta_0 d^{abc} d^{abc} a_s^4 + \mathcal{O}(a_s^5). \quad (1.31)$$

В завершении данного раздела отметим, что коэффициентная функция Бьёркена (1.20) тесно связана с правилом сумм Гросса–Ллелллина–Смита глубококонепругого рассеяния (анти)нейтрино на нуклоне:

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(F_3^{\nu p}(x, Q^2) + F_3^{\bar{\nu} p}(x, Q^2) \right) dx = 3C_{GLS}(a_s(Q^2)), \quad (1.32)$$

где вследствие киральной инвариантности несинглетная часть функции $C_{GLS}(a_s)$ тождественна $C_{Bjp}^{NS}(a_s)$, чего, однако, не наблюдается для синглетных вкладов. В самом деле, в отличие

от функции $C_{Bjp}(a_s)$ ненулевая синглетная поправка к $C_{GLS}(a_s)$ впервые появляется уже на трёхпетлевом уровне [48, 82].

1.4. Статический потенциал кварк–антикварковой пары

Перейдём теперь к изучению такой важной как с теоретической, так и с феноменологической точки зрения ренорминвариантной физической величины как статический потенциал взаимодействия кварка и антикварка, находящихся в синглетном по цвету состоянии в КХД. Как известно, энергия взаимодействия такой системы чаще всего описывается членами двух типов (опуская эффекты, связанные со спином и орбитальным моментом частиц) — пертурбативным кулоноподобным вкладом, доминирующем на достаточно малых расстояниях, а также существенно непертурбативным, преобладающим на больших расстояниях (характерный размер порядка радиуса нуклона). Модель формы такого потенциала в литературе часто называется корнелльской (см. например [86]):

$$V_c(r) = -\frac{C_F \alpha_{s,c}}{r} + \sigma r, \quad (1.33)$$

где σr — непертурбативная часть потенциала с линейным запирающим взаимодействием, эффективно описывающая явление конфайнмента кварков. Вид потенциал (1.33) предсказывается как в некоторых моделях КТП, где, например, параметр “натяжения струны” σ может быть выражен через локальный оператор глюонного конденсата [87], так и подтверждается вычислениями в рамках КХД на решётке в дискретной пространственноподобной евклидовой области [88].

Особенность исследования весьма интересных с физической точки зрения тяжёлых кваркониев (J/ψ , Υ и их возбуждённых состояний) состоит в том, что для полноценного и правильного описания их спектров масс и энергий необходимо учитывать в потенциале вклады не только пертурбативных, но и непертурбативных эффектов, поскольку данные частицы расположены в промежуточной области расстояний. Изучение данного факта в рамках нерелятивистской КХД можно найти, например, в работе [89]. Совокупность результатов по фитированию параметров потенциала методом χ^2 из экспериментальных данных по исследованию свойств боттомония может быть представлена следующим образом: $\alpha_{s,c} \simeq 0.35$, $\sigma \simeq 0.2 \text{ GeV}^2$ [86]. Эти значения находятся в хорошем согласии с результатами решёточных вычислений [90]. Однако, стоит отметить, что эти результаты были получены для корнелльской модели потенциала с дополнительным спин–спиновым и спин–орбитальным взаимодействием.

Как уже упоминалось ранее, в данной работе мы не будем рассматривать непертурбативные эффекты, а остановимся на изучении лишь вкладов, полученных по ТВ в области

энергий много больших Λ_{QCD} . Таковым является первое слагаемое в выражении (1.33). Его отличие от потенциала Кулона состоит в дополнительном множителе C_F , учитывающем цветовые степени свободы кварков. Этот член может быть легко получен из формулы соответствия, которая связывает понятие борновского потенциала взаимодействия с амплитудой рассеяния в нерелятивистском пределе [5, 91]:

$$\frac{\mathcal{M}_{fi}}{\sqrt{2\varepsilon_1 2\varepsilon_2 2\varepsilon'_1 2\varepsilon'_2}} = -\varphi_1^\dagger \varphi_1 V(\vec{q}^2) \varphi_2^\dagger \varphi_2, \quad (1.34)$$

где φ_1, φ_2 и φ'_1 и φ'_2 — двухкомпонентные спиноры, описывающие начальное и конечное состояние кварка и антикварка соответственно, а ε_i^k — энергия i -го кварка, $V(\vec{q}^2)$ — трёхмерный фурье-образ потенциала. Действительно,

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{4\pi\alpha_s}{q^2} \bar{u}(p'_1) \gamma^\mu T^a u(p_1) \bar{v}(p'_2) \gamma_\mu T^a v(p_2), \quad (1.35)$$

где $q = p'_1 - p_1$. Для нерелятивистского случая $p_1 = (m, \vec{p}_1)$, $p_2 = (m, \vec{p}_2)$, $q^2 \approx -\vec{q}^2$ и биспиноры равны $u^\mathrm{T}(p_1) = \sqrt{\varepsilon_1 + m}(\varphi_1, \vec{\sigma}\vec{p}_1\varphi_1/(\varepsilon_1 + m))^\mathrm{T} \approx \sqrt{2m}(\varphi_1, 0)^\mathrm{T}$, $v^\mathrm{T}(p_2) \approx \sqrt{2m}(0, \chi_2)^\mathrm{T}$. Согласно квантовой механике $\chi_2 = -i\sigma_2\varphi_2^*$. Отсюда получаем, что $\bar{u}(p'_1)\gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(p'_1)\gamma^0 u(p_1) = 2m\varphi_1^{\dagger\prime} \varphi_1$ и $\bar{v}(p'_2)\gamma^\mu v(p_2) = -2m\varphi_2^{\dagger\prime} \varphi_2$. Подставляя эти результаты в выражение (1.35), находим

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{4\pi C_F \alpha_s}{\vec{q}^2} 2m\varphi_1^{\dagger\prime} \varphi_1 \cdot 2m\varphi_2^{\dagger\prime} \varphi_2. \quad (1.36)$$

Сравнивая данную амплитуду рассеяния с формулой соответствия (1.34), приходим к потенциалу $V(\vec{q}^2) = -4\pi C_F \alpha_s / \vec{q}^2$. Отметим, что полученное на древесном уровне выражение $V(\vec{q}^2)$ является калибровочно-инвариантной величиной. В самом деле, если бы мы использовали не калибровку Фейнмана $\xi = 1$, а удерживали значение параметра ξ свободным в пропагаторе глюона, то всё равно пришли бы к результату (1.36), поскольку на уравнениях движения все калибровочно-зависимые слагаемые были бы равны нулю.

При учёте поправок высших порядков ТВ к кулоновскому потенциалу КХД, полученных в рамках калибровочно-инвариантной $\overline{\text{MS}}$ -схемы перенормировок, величина $V(\vec{q}^2)$ по-прежнему остаётся калибровочно-независимой. На практике при вычислении петлевых поправок к статическому потенциалу рассматривают калибровочно-инвариантную вильсоновскую петлю [92] $W_L = \text{Tr} \left[\hat{P} \exp \left(ig_s \oint_L dx^\mu A_\mu(x) \right) \right]$, где L — замкнутый прямоугольный контур со сторонами, равными r и T соответственно в пространстве и времени, \hat{P} — оператор упорядочения калибровочных глюонных полей вдоль пути. В пределе $T \gg r$ вакуумное ожидание вильсоновской петли определяет вид статического потенциала [93]:

$$\langle W_L \rangle = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}c^a \mathcal{D}\bar{c}^a W_L \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD} \right) \propto \exp(-iTV(r)), \quad (1.37)$$

где c^a — антикоммутирующие поля духов Фаддеева–Попова. Выбор прямоугольного контура интегрирования с $T \gg r$ соответствует ситуации, когда кварк и антикварк, разведённые на расстояние r друг от друга, взаимодействуют на протяжении длительного (в идеале бесконечно большого) времени T , а затем снова сводятся в точку. При таком рассмотрении кварки воспринимаются не как динамические переменные, а как внешние источники, взаимодействующие с полем глюона A_μ^a посредством тока $J_\mu^a(x) = ig_s \delta_{\mu 0} T^a (\delta(\vec{x} - \vec{r}') - \delta(\vec{x} - \vec{r}''))$, $r = |\vec{r}' - \vec{r}''|$, $\alpha_s = g_s^2/4\pi$.

Соотношение (1.37) можно переписать в следующем более удобном виде:

$$V(r) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{iT} \ln \frac{\langle 0 | \text{Tr} \hat{P} e^{\int_L dx^\mu A_\mu} | 0 \rangle}{\langle 0 | \text{Tr} 1 | 0 \rangle}, \quad (1.38)$$

где под усреднением понимается процедура взятия интеграла по траекториям.

Здесь стоит отметить, что помимо калибровочной инвариантности в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, статический потенциал также является ренорминвариантной величиной. При этом на практике ответ, полученный в рамках теории возмущений в данном конкретном порядке, является зависимым от масштабного фактора μ^2 . Данное обстоятельство объясняется тем, что полученный ряд ТВ является не полным, а оборванным в рассматриваемом n -петлевом приближении.

На сегодняшний момент времени пертурбативный кулоновский потенциал взаимодействия статической кварк–антикварковой пары в синглетном состоянии известен в аналитическом виде на трёхпетлевом уровне ТВ из расчётов, выполненных в рамках эффективной теории тяжёлых кварков [89] при помощи соотношения (1.38):

$$V(r) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{q}^2), \quad (1.39)$$

$$V(\vec{q}^2) = - \frac{4\pi C_F \alpha_s(\vec{q}^2)}{\vec{q}^2} \left(1 + a_1 a_s(\vec{q}^2) + a_2 a_s^2(\vec{q}^2) + \left(a_3 + \frac{\pi^2 C_A^3}{8} \ln \frac{\mu^2}{\vec{q}^2} \right) a_s^3(\vec{q}^2) \right).$$

Первые две поправки a_1 и a_2 в $\overline{\text{MS}}$ -схеме были найдены в работах [93, 94], [95, 96] соответственно и имеют следующий вид:

$$a_1 = \frac{31}{36} C_A - \frac{5}{9} T_F n_f, \quad (1.40)$$

$$a_2 = \left(\frac{4343}{2592} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^4}{64} + \frac{11}{24} \zeta_3 \right) C_A^2 - \left(\frac{899}{648} + \frac{7}{6} \zeta_3 \right) C_A T_F n_f - \left(\frac{55}{48} - \zeta_3 \right) C_F T_F n_f + \left(\frac{5}{9} T_F n_f \right)^2. \quad (1.41)$$

Уже из явного вида выражений (1.40) и (1.41) следует, что k -петлевая поправка к потенциалу будет полиномом степени k по числу активных ароматов кварков $a_k = \sum_{i=0}^k a_k^{(i)} n_f^i$,

поскольку в каждом последующем порядке ТВ можно пропустить через виртуальный глюон дополнительную фермионную петлю, пропорциональную числу n_f . Более того, лидирующий по степеням n_f вклад ренормального типа в КХД поправку a_k определяется видом абелевого слагаемого, входящего в однопетлевой коэффициент a_1 . Данный член может быть извлечён из инвариантного заряда КЭД, связанного с поляризационной функцией фотона, и, согласно выражению (1.40), он равен

$$a_k^{(k)} = \left(-\frac{5}{9} T_F \right)^k. \quad (1.42)$$

В частности, трёхпетлевой коэффициент a_3 является кубическим полиномом по n_f :

$$a_3 = a_3^{(3)} n_f^3 + a_3^{(2)} n_f^2 + a_3^{(1)} n_f + a_3^{(0)}. \quad (1.43)$$

В этом разложении квадратичная поправка $a_3^{(2)}$ была вычислена в аналитическом виде, а линейная $a_3^{(1)}$ — в полу-аналитическом виде в работе [97]. Константный член $a_3^{(0)}$ изначально был найден численно в работах [98, 99] с теоретическими погрешностями порядка $\sim 0.1\%$, возникающими при вычислении соответствующих трёхпетлевых мастер-интегралов методом Монте-Карло с использованием представления Меллина-Барнса, которое позволяет заменять скалярные пропагаторы на их интегральные представления посредством гамма-функций Эйлера. Позднее в статье [25] был предложен, оказавшийся впоследствии неправильным, возможный вид разложения коэффициентов $a_3^{(1)}$ и $a_3^{(0)}$ по “базисным” трансцендентным функциям. Однако, несмотря на это, эти предположения во многом стимулировали авторов работы [100] к вычислению данных коэффициентов в аналитическом виде. Оказалось, что их явный вид имеет гораздо более сложную структуру, нежели соотношения (1.40) и (1.41). Действительно, помимо ожидаемых базисных констант π^2 , π^4 , ζ_3 , $\pi^2\zeta_3$ и ζ_5 , результаты вычислений [100] содержат дополнительные вклады, пропорциональные $\pi^2 \ln 2$ и $\pi^4 \ln 2$, и, что более существенно, новые константы с трансцендентностью веса $w = 6$, такие как π^6 , ζ_3^2 , $\pi^2\zeta_3 \ln 2$, $\pi^4 \ln^2 2$, $\pi^2\alpha_4$ и s_6 , где $\alpha_4 = \text{Li}_4(1/2) + \ln^4 2/4!$ с полилогарифмической функцией $\text{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k k^{-n}$ и $s_6 = \zeta_6 + \zeta_{-5,-1}$ с кратным значением дзета-функции веса шесть и глубины два $\zeta_{-5,-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+k} / ik^5 \approx -0.0299016$.

Приведём явный вид этих поправок:

$$a_3^{(2)} = \left(\frac{12541}{15552} + \frac{23}{12} \zeta_3 + \frac{\pi^4}{135} \right) C_A T_F^2 + \left(\frac{7001}{2592} - \frac{13}{6} \zeta_3 \right) C_F T_F^2, \quad (1.44)$$

$$a_3^{(1)} = \left[-\frac{58747}{31104} - \frac{35}{64} \zeta_3 + \frac{761}{161280} \pi^6 - \frac{3}{4} s_6 + \pi^4 \left(-\frac{157}{3456} - \frac{5}{576} \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{64} \right) \right] \quad (1.45)$$

$$+ \pi^2 \left(\frac{17}{1728} - \frac{19}{192} \zeta_3 - \frac{\ln 2}{48} - \frac{7}{32} \zeta_3 \ln 2 - \frac{\alpha_4}{2} \right) + \frac{1091}{384} \zeta_5 + \frac{57}{128} \zeta_3^2 \Big] C_A^2 T_F$$

$$+ \left(-\frac{71281}{10368} + \frac{33}{8}\zeta_3 + \frac{5}{4}\zeta_5 \right) C_A C_F T_F + \left(\frac{143}{288} + \frac{37}{24}\zeta_3 - \frac{5}{2}\zeta_5 \right) C_F^2 T_F \quad (1.46)$$

$$+ \left[\frac{5}{96}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{23}{24} - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln^2 2}{2} \right) + \pi^2 \left(\frac{79}{36} - \frac{61}{12}\zeta_3 + \ln 2 + \frac{21}{2}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A},$$

$$a_3^{(0)} = \left[\frac{385645}{186624} + \frac{73}{24}\zeta_3 - \frac{4621}{193536}\pi^6 + \frac{9}{4}s_6 + \pi^4 \left(\frac{1349}{17280} - \frac{5}{144}\ln 2 - \frac{5}{72}\ln^2 2 \right) \right] \quad (1.47)$$

$$+ \pi^2 \left(-\frac{953}{3456} + \frac{175}{128}\zeta_3 - \frac{461}{288}\ln 2 + \frac{217}{192}\zeta_3 \ln 2 + \frac{73}{24}\alpha_4 \right)$$

$$- \frac{1927}{384}\zeta_5 - \frac{143}{128}\zeta_3^2 \Big] C_A^3 + \left[\frac{1511}{2880}\pi^6 + \pi^4 \left(-\frac{39}{16} + \frac{35}{12}\ln 2 + \frac{31}{12}\ln^2 2 \right) \right.$$

$$\left. + \pi^2 \left(\frac{929}{72} - \frac{827}{24}\zeta_3 - 74\alpha_4 + \frac{461}{6}\ln 2 - \frac{217}{4}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A}.$$

Коэффициенты, пропорциональные цветовым структурам типа $d_F^{abcd} d_F^{abcd}$, возникают благодаря специфическим диаграммам рассеяния света на свете (см. Рис. 1.3 справа). В отличие от функций Адлера и Бьёркена, где синглетные вклады от подобных процессов с участием трёх глюонов и одного фотона давали поправки, пропорциональные $d^{abc} d^{abc}$, в статическом потенциале в диаграммах с рассеянием света на свете участвует четыре глюона.

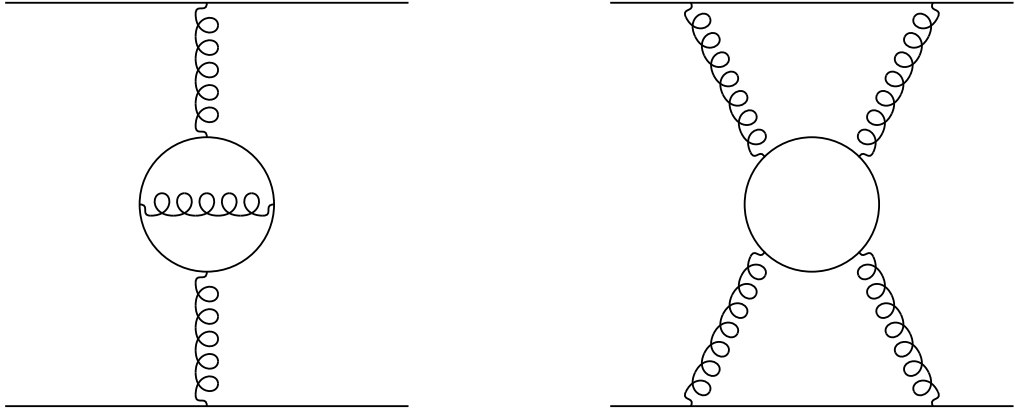


Рис. 1.3: Характерные диаграммы, дающие вклад в поправки пертурбативного статического потенциала. Диаграмма справа типа рассеяния света на свете.

Стоит отметить, что в случае $U(1)$ -группы, соответствующей КЭД пределу $SU(N_c)$ -теории, с $C_A = 0$ и $d_A^{abcd} = 0$ полностью неабелева часть потенциала $a_3^{(0)} = 0$, а оставшиеся n_f -зависимые члены, пропорциональные степеням T_F , находятся в полном согласии с результатами трёхпетлевых вычислений для собственно-энергетической функции фотона Π_{QED} в КЭД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [101], ответственной за поправки к потенциалу взаимодействия заряженных лептонов. В самом деле, статический кулоновский потенциал в КЭД связан с инвариантным зарядом следующим образом:

$$V_{QED}(\vec{q}^2) = -\frac{4\pi}{\vec{q}^2} \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \Pi_{QED}(\vec{q}^2/\mu^2, \alpha)} \left(1 + N \cdot C \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots \right), \quad (1.48)$$

где N — количество заряженных лептонов, \mathcal{C} — поправка, связанная с появлением диаграмм рассеяния света на свете, которая в рассматриваемом порядке точности не возникает при вычислении Π_{QED} . В КХД вклад этого эффекта в потенциал содержится в пропорциональной $d_F^{abcd} d_F^{abcd}/N_A$ поправке к коэффициенту $a_3^{(1)}$ в (1.45). В случае КЭД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме он равен

$$\mathcal{C} = \frac{5}{96}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{23}{24} - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln^2 2}{2} \right) + \pi^2 \left(\frac{79}{36} - \frac{61}{12}\zeta_3 + \ln 2 + \frac{21}{2}\zeta_3 \ln 2 \right) \approx -0.888062. \quad (1.49)$$

При этом зависимость вакуумной поляризационной функции фотона от масштаба в $\overline{\text{MS}}$ -схеме имеет вид [101]:

$$\begin{aligned} \Pi_{QED}(\vec{q}^2/\mu^2, \alpha) &= \left(\frac{5}{9}N - \frac{N}{3}L \right) a(\mu^2) + \left(\left(\frac{55}{48} - \zeta_3 \right)N - \frac{N}{4}L \right) a^2(\mu^2) \\ &+ \left(\left(-\frac{143}{288} - \frac{37}{24}\zeta_3 + \frac{5}{2}\zeta_5 \right)N - \left(\frac{3701}{2592} - \frac{19}{18}\zeta_3 \right)N^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{N}{32} + \left(\frac{11}{24} - \frac{\zeta_3}{3} \right)N^2 \right)L - \frac{N^2}{24}L^2 \right) a^3(\mu^2), \end{aligned} \quad (1.50)$$

где $L = \ln(\vec{q}^2/\mu^2)$, $a(\mu^2) = \alpha(\mu^2)/\pi$.

Для того чтобы определить явную форму статического потенциала КХД в координатном представлении, для начала нужно восстановить все ренормгрупповые логарифмы в зависимости $\alpha_s(\vec{q}^2)$. Это можно сделать, используя формулу (A.7) из приложения A. Затем, выполняя преобразование Фурье (1.39) при помощи теоремы Коши о вычетах, которая позволяет получить формулы

$$\mathcal{J}_n = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{\vec{q}^2} \ln^n \left(\frac{\mu^2}{\vec{q}^2} \right) = \frac{2^{n-1}}{\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \ln^n \left(\frac{\mu r}{x} \right), \quad (1.51)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} \sin x \ln^n x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^n}{dx^n} \left(\Gamma(x) \sin \frac{\pi x}{2} \right), \quad (1.52)$$

находим следующее выражение для пертурбативного потенциала КХД в координатном представлении:

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{C_F \alpha_s(\mu^2)}{r} \left[1 + a_s(\mu^2)(a_1 + \beta_0 \ln(\mu^2 \tilde{r}^2)) \right. \\ &+ a_s^2(\mu^2) \left(a_2 + \beta_0^2 \pi^2/3 + (2a_1\beta_0 + \beta_1) \ln(\mu^2 \tilde{r}^2) + \beta_0^2 \ln^2(\mu^2 \tilde{r}^2) \right) \\ &+ a_s^3(\mu^2) \left(a_3 + \pi^2(5\beta_0\beta_1/6 + a_1\beta_0^2) + 16\beta_0^3\zeta_3 + (\beta_2 + 2a_1\beta_1 + 3a_2\beta_0 + \pi^2 C_A^3/8 \right. \\ &\left. \left. + \beta_0^3 \pi^2) \ln(\mu^2 \tilde{r}^2) + (5\beta_0\beta_1/2 + 3a_1\beta_0^2) \ln^2(\mu^2 \tilde{r}^2) + \beta_0^3 \ln^3(\mu^2 \tilde{r}^2) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.53)$$

где $\tilde{r} = r \cdot \exp(\gamma_E)$, $\gamma_E \approx 0.577215$ — постоянная Эйлера–Маскерони. Отметим один интересный факт, касающийся возникающих из-за преобразования Фурье π^2 -членов в (1.53): они полностью совпадают с выражениями для эффектов аналитического продолжения (1.18).

Для качественного исследования поведения кулоноподобного статического потенциала КХД в однопетлевом (LO), двухпетлевом (NLO) и трёхпетлевом (NNLO) приближении при $n_f = 5$ мы используем в качестве нормировочной точки следующие значения константы связи на полюсной массе Z -бозона, а именно $\alpha_s(M_Z^2) = 0.119 \pm 0.005$ [102] при $M_Z \approx 91.18$ ГэВ [103] для LO и NLO приближения, и $\alpha_s(M_Z^2) = 0.118 \pm 0.003$ при $M_Z \approx 91.188$ ГэВ [104, 105] для поведения в NNLO порядке. Соответствующие этим значениям масштабные параметры $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{NLO}}^{(n_f=5)} \approx 240$ МэВ и $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{NLO}}^{(n_f=5)} \approx 208$ МэВ могут быть найдены из разложения $\alpha_s(\mu^2)$ по степеням обратных логарифмов $\ln(\mu^2/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_f)})$ в $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ и $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ порядке ТВ.

Для того чтобы убедиться в устойчивости перенормированного статического потенциала КХД по отношению к изменению масштаба μ , рассмотрим Рис. 1.4. Действительно, кривые на верхнем графике, полученные при $\mu = 10$ ГэВ, и на нижнем при $\mu = 100$ ГэВ (см. также [99]), практически совпадают (наибольшее отклонение наблюдается для кривых в LO приближении). Более того, из данного рисунка также видно, что различие в поведении потенциала, полученного в двух и трёхпетлевом приближении, почти не наблюдается, что свидетельствует о достаточно быстрой сходимости ряда ТВ для $V(r)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме по крайней мере в рассматриваемом $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ порядке ТВ.

Поясним природу возникновения дополнительного не контролируемого ренормгруппой логарифмического члена $\pi^2 C_A^3 L/8$ в формуле (1.39), впервые полученного в работе [106]. Он возникает из-за инфракрасных (ИК) расходимостей, которые начинают проявляться в статическом потенциале на трёхпетлевом уровне. Однако, в конкретных приложениях эффективной нерелятивистской КХД эти ИК-расходящиеся члены в точности компенсируются соответствующими расходящимися УФ-вкладами, возникающими при дипольном взаимодействии тяжёлых кварков, находящихся в связанном состоянии, с ультрамягкими виртуальными глюонами [89, 106, 107]. Ввиду того, что нас будут интересовать только области промежуточных и высоких энергий, в дальнейшем мы не будем учитывать эти ИК-поправки.

Как уже обсуждалось ранее, пертурбативный потенциал является ренорминвариантной величиной и удовлетворяет уравнению ренормгруппы с аномальной размерностью γ , равной нулю:

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(a_s) \frac{\partial}{\partial a_s} \right) V(a_s(\mu^2), \vec{q}^2/\mu^2) = 0. \quad (1.54)$$

Данное уравнение записано в безмассовом пределе. Пренебрежение массовыми поправками к потенциалу возможно, поскольку мы рассматриваем области достаточно больших по сравнению с масштабом Λ_{QCD} переданных импульсов (без линейного запирающего потенциала). Более того, как показывают вычисления, учёт этих эффектов действительно очень

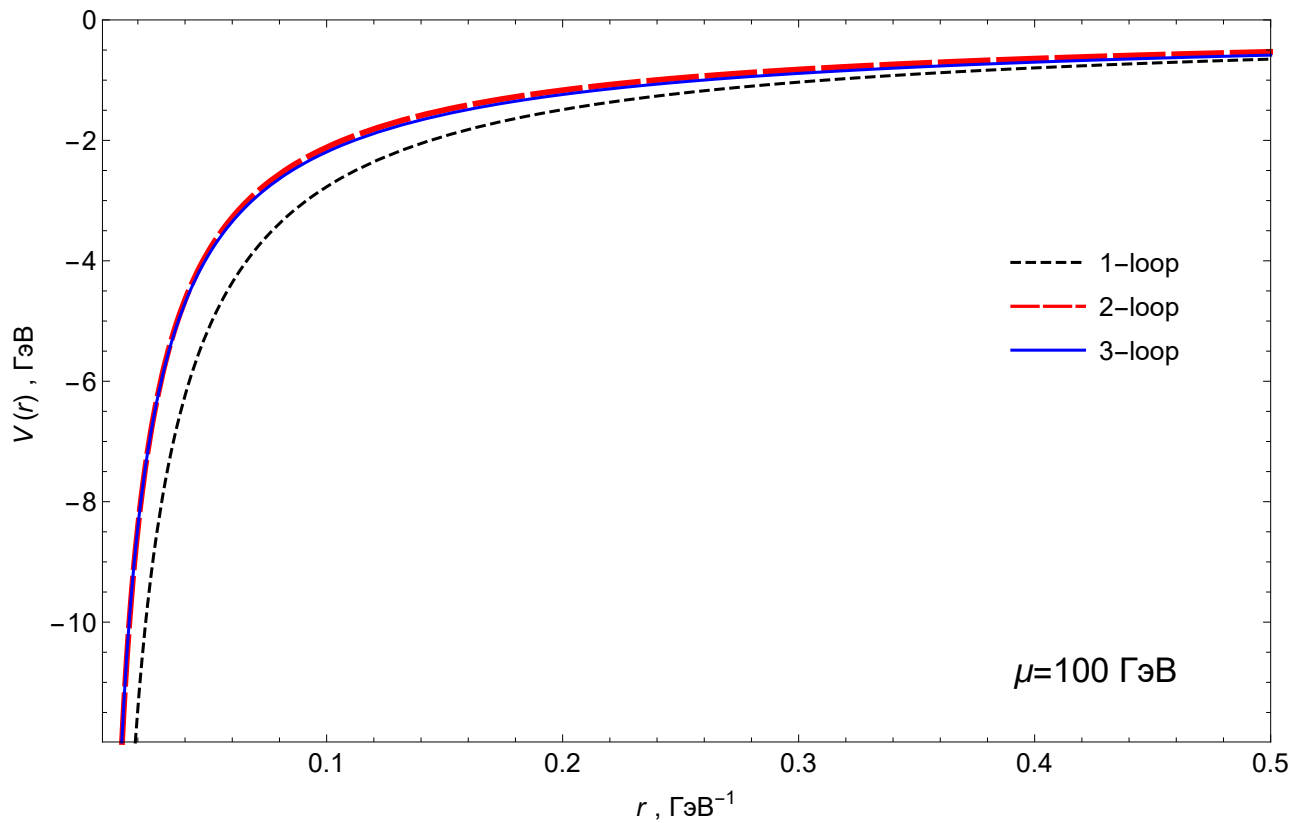
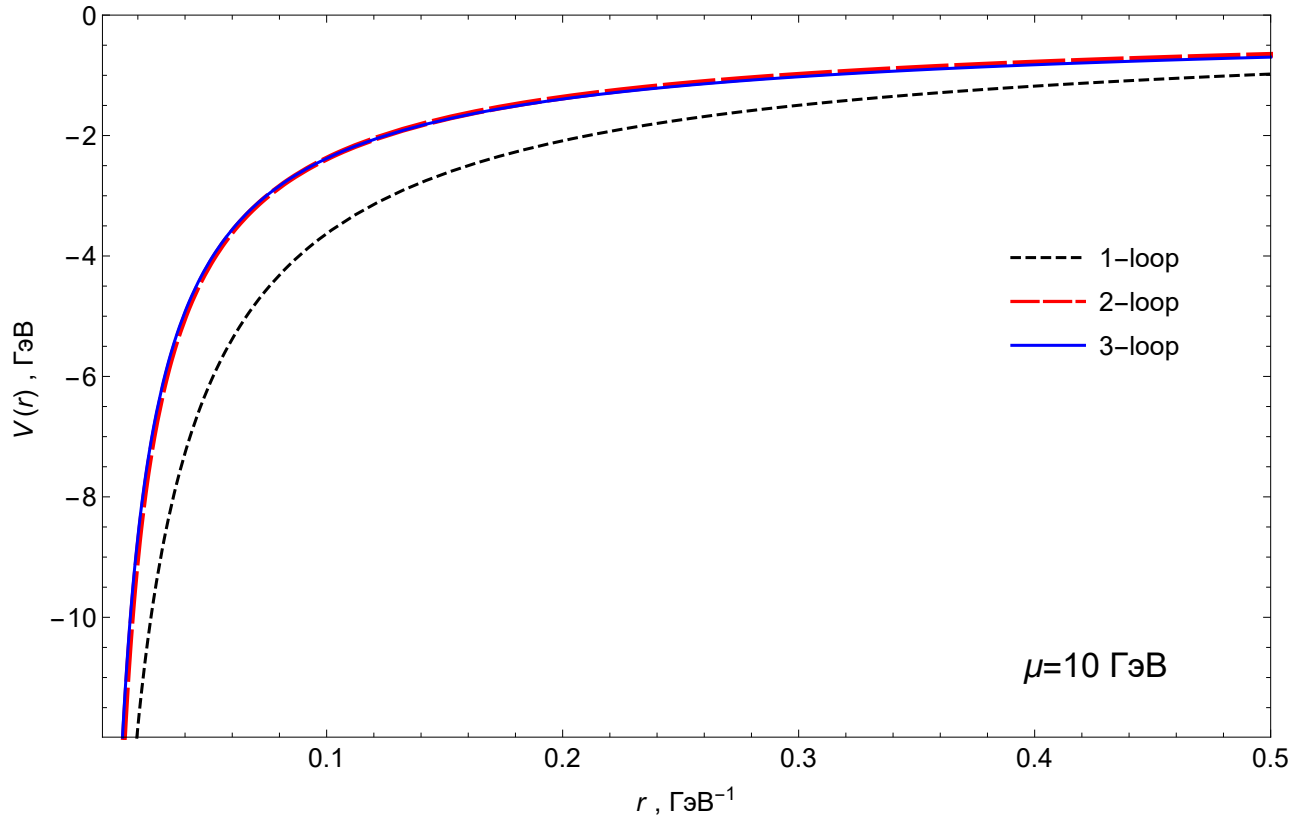


Рис. 1.4: Статический пертурбативный потенциал КХД в LO, NLO и NNLO приближении при $n_f = 5$ и $\mu = 10$ ГэВ (верхний график), а также $\mu = 100$ ГэВ (нижний график); $1 \text{ ГэВ}^{-1} = 0.2 \text{ фм}$.

мал [108, 109]. К примеру, лидирующая поправка к потенциалу взаимодействия тяжёлых b -кварков, связанная с наличием ненулевой массы c -кварка

$$\delta V_{charm}(r) = -\frac{4\pi}{9} \frac{a_s^2(\mu^2)}{r} \left[\int_1^\infty dx \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right) e^{-2\bar{m}_c r x} + \ln(\bar{m}_c \tilde{r}) + \frac{5}{6} \right], \quad (1.55)$$

при $\mu = 10$ ГэВ и $r \sim 0.1$ ГэВ $^{-1}$ даёт вклад, не превышающий нескольких процентов от величины однопетлевой безмассовой поправки. Здесь под \bar{m}_c понимается бегущая масса c -кварка в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, нормированная на масштабе \bar{m}_c . Что же касается β -функции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, то её коэффициенты β_i не зависят от размерных параметров теории, таких как массы кварков (или лептонов). Далее мы будем пользоваться калибровочной независимостью и ренорминвариантностью потенциала в пренебрежении массовыми поправками.

1.5. Рассмотрение эффективной V-схемы

На практике зачастую применяют так называемую V-схему, впервые используемую в работах [96] и [95]. По определению в этой схеме все высшие поправки теории возмущений к статическому кулоновскому потенциалу КХД, вычисленные в области асимптотической свободы, включены в эффективную константу связи сильного взаимодействия $\alpha_{s,V}$ таким образом, что потенциал приобретает кулоновский вид:

$$V(\vec{q}^2) = -4\pi C_F \frac{\alpha_{s,V}(\vec{q}^2)}{\vec{q}^2}. \quad (1.56)$$

Подставляя теперь результаты $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -разложения (A.7) во второе соотношение равенства (1.39), получаем следующее представление эффективной константы связи в V-схеме через константу связи сильного взаимодействия $\alpha_s(\mu^2)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$\alpha_{s,V}(\vec{q}^2) = \alpha_s(\mu^2) P(\alpha_s(\mu^2), L) = \alpha_s(\mu^2) \sum_{n=0}^3 P_n(L) \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^n, \quad (1.57)$$

где $P_n(L)$ обозначает полином n -й степени по $L = \ln(\mu^2/\vec{q}^2)$, который представим в следующем виде:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = a_1 + \beta_0 L, \quad P_2 = a_2 + (2a_1\beta_0 + \beta_1)L + \beta_0^2 L^2, \quad (1.58)$$

$$P_3 = a_3 + (3a_2\beta_0 + 2a_1\beta_1 + \beta_2)L + (3a_1\beta_0^2 + 5\beta_0\beta_1/2)L^2 + \beta_0^3 L^3. \quad (1.59)$$

V-схема определена для конкретной физической ренорминвариантной величины. Однако, эта схема не является строго говоря самостоятельной: её применение требует знания высших поправок ТВ к потенциалу, вычисленных в рамках калибровочно-инвариантной

$\overline{\text{MS}}$ -схемы перенормировок. Следствием этих утверждений является калибровочная инвариантность V -схемы.

Данная схема использовалась в различных феноменологических задачах [95, 96, 110, 111]. Например, в [110] она применялась для моделирования массовой зависимости коэффициентов β -функции. Как показано в этой работе, учёт массовых поправок к статическому потенциалу позволяет сгладить поведение бегущей константы связи в V -схеме при прохождении через пороги рождения тяжёлых кварков в области энергий от рождения очарованных кварков вплоть до энергий $s \sim M_Z^2$, когда начинают проявляться электрослабые эффекты. $\overline{\text{MS}}$ -схема лишена такой возможности: её коэффициенты не зависят от масс кварков. Как мы видели, α_V в V -схеме в КЭД близко связана с понятием инвариантного заряда, а значит, её β^V -функция будет близка к функции Гелл-Манна–Лоу. Следствия этого утверждения были исследованы в работе [25] и будут рассмотрены ниже.

1.5.1. Аналитическое четырёхпетлевое выражение для β -функции в V -схеме в КХД

Для вычисления β -функции в V -схеме мы будем использовать развитый в [112–114] метод эффективных зарядов (effective charges ECH). Следуя этому методу, на первом этапе нужно зафиксировать эффективный масштаб μ_V^2 в V -схеме согласно соотношению:

$$\mu_V^2 = \mu^2 \exp(a_1/\beta_0), \quad (1.60)$$

где введённый выше масштабный параметр μ^2 определялся в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, a_1 — однопетлевая поправка к статическому потенциалу (1.40), β_0 — первый схемно-независимый коэффициент β -функции (A.1).

На следующем шаге, используя выражение (1.57) и разложение константы связи сильного взаимодействия в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, нормированной на масштабе μ^2 , через ту же самую константу, но на масштабе μ_V^2 , фиксируем квадрат переданного импульса $\bar{q}^2 = \mu_V^2$ и получаем

$$a_{s,V}(\mu_V^2) = a_s(\mu_V^2)(1 + a_1 a_s(\mu_V^2) + a_2 a_s^2(\mu_V^2) + a_3 a_s^3(\mu_V^2) + \mathcal{O}(a_s^4)). \quad (1.61)$$

После того как мы определили масштабный параметр в V -схеме и соответствующую константу связи, мы можем ввести понятие ренормгрупповой β -функции в V -схеме:

$$\beta^V(\alpha_{s,V}) = \mu_V^2 \frac{\partial}{\partial \mu_V^2} \left(\frac{\alpha_{s,V}(\mu_V^2)}{\pi} \right) = - \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^V \left(\frac{\alpha_{s,V}(\mu_V^2)}{\pi} \right)^{i+2}, \quad (1.62)$$

которая ответственна за эволюцию константы связи $\alpha_{s,V}$ в области средних (порядка нескольких ГэВ) и больших значений переданного импульса.

Для того чтобы выяснить, как связаны между собой β -функции в V и $\overline{\text{MS}}$ -схемах, заметим, что $d\mu_V^2/\mu_V^2 = d\mu^2/\mu^2$. Отсюда можно получить следующее соотношение

$$\beta^V(a_{s,V}(a_s(\mu_V^2))) = \beta(a_s(\mu_V^2)) \frac{da_{s,V}(a_s(\mu_V^2))}{da_s(\mu_V^2)}. \quad (1.63)$$

Уравнение (1.63) непосредственно приводит к выводу о калибровочной независимости β^V -функции.

Используя выражения (1.17), (1.61), (1.62) и подставляя их в полученное соотношение (1.63), находим связь коэффициентов β -функций в двух рассматриваемых схемах перенормировок:

$$\beta_0^V = \beta_0, \quad \beta_1^V = \beta_1, \quad (1.64)$$

$$\beta_2^V = \beta_2 - a_1\beta_1 + (a_2 - a_1^2)\beta_0, \quad (1.65)$$

$$\beta_3^V = \beta_3 - 2a_1\beta_2 + a_1^2\beta_1 + (2a_3 - 6a_1a_2 + 4a_1^3)\beta_0. \quad (1.66)$$

Аналоги формул (1.64-1.66) могут быть получены и в более высоких порядках ТВ. Например, пяти- и шестипетлевые коэффициенты β^V -функции будут равны

$$\beta_4^V = \beta_4 - 3a_1\beta_3 + (4a_1^2 - a_2)\beta_2 + (a_3 - 2a_1a_2)\beta_1 \quad (1.67)$$

$$+ (3a_4 - 12a_1a_3 - 5a_2^2 + 28a_1^2a_2 - 14a_1^4)\beta_0,$$

$$\beta_5^V = \beta_5 - 4a_1\beta_4 + (8a_1^2 - 2a_2)\beta_3 + (4a_1a_2 - 8a_1^3)\beta_2 \quad (1.68)$$

$$+ (2a_4 - 8a_1a_3 + 16a_1^2a_2 - 3a_2^2 - 6a_1^4)\beta_1$$

$$+ (4a_5 - 20a_1a_4 - 16a_2a_3 + 48a_1a_2^2 - 120a_1^3a_2 + 56a_1^2a_3 + 48a_1^5)\beta_0.$$

В выражении (1.67) на сегодняшний момент времени известны (в аналитическом виде) все слагаемые, за исключением поправки a_4 четвёртого порядка ($N^3\text{LO}$) к статическому потенциалу. В формуле (1.68) неизвестными являются коэффициенты β_5 , a_4 и a_5 . В дальнейшем мы будем использовать эти соотношения.

Формулы (1.64-1.68) демонстрируют общий закон преобразования коэффициентов β функции при переходе от одной калибровочно-инвариантной схемы перенормировок к другой (не обязательно V -схеме). Более того, следствием применения метода эффективных зарядов является схемная инвариантность этих коэффициентов в рамках калибровочно-независимых схем (например, $\overline{\text{MS}}$ -подобных).

Соотношения (1.64) отражают хорошо известный факт о схемной независимости первых двух коэффициентов β -функции. Однако, в общем случае данное утверждение справедливо только для коэффициента β_0 . Двухпетлевая поправка β_1 не зависит от схемы перенормировки только для класса калибровочно-инвариантных схем вычитаний $U\Phi$ расходимостей.

Итак, первые два коэффициента β^V -функции тождественно совпадают с их $\overline{\text{MS}}$ -аналогами (см. (A.1-A.2)):

$$\beta_0^V = \frac{11}{12}C_A - \frac{1}{3}T_F n_f, \quad (1.69)$$

$$\beta_1^V = \frac{17}{24}C_A^2 - \frac{1}{4}C_F T_F n_f - \frac{5}{12}C_A T_F n_f. \quad (1.70)$$

Трёхпетлевой коэффициент β^V -функции содержит поправки первого и второго порядков ТВ к статическому потенциалу. Согласно (1.65) имеем:

$$\begin{aligned} \beta_2^V &= \left(\frac{103}{96} + \frac{121}{288}\zeta_3 + \frac{11}{48}\pi^2 - \frac{11}{768}\pi^4 \right) C_A^3 \\ &- \left(\frac{445}{576} + \frac{11}{9}\zeta_3 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^4}{192} \right) C_A^2 T_F n_f - \left(\frac{343}{288} - \frac{11}{12}\zeta_3 \right) C_A C_F T_F n_f \\ &+ \frac{1}{32} C_F^2 T_F n_f + \left(\frac{1}{288} + \frac{7}{18}\zeta_3 \right) C_A T_F^2 n_f^2 + \left(\frac{23}{72} - \frac{1}{3}\zeta_3 \right) C_F T_F^2 n_f^2. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Выражение (1.71) впервые было получено в аналитическом виде в работах [95, 96]. В отличие от коэффициента β_2 в $\overline{\text{MS}}$ -схеме (A.3) этот результат содержит дополнительные трансцендентные константы, такие как ζ_3 , π^2 и π^4 , появляющиеся при вычислении двухпетлевой поправки (1.41) к статическому потенциалу КХД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в евклидовой области переданных импульсов.

Используя аналитические выражения для коэффициентов β -функции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в четырёхпетлевом приближении (A.1-A.4), а также явный вид первых трёх поправок к кулоновскому потенциалу КХД в синглетном представлении (1.40-1.41), (1.44-1.47), находим четырёхпетлевой коэффициент β_3^V в V -схеме для случая $SU(N_c)$ калибровочной группы:

$$\begin{aligned} \beta_3^V &= \left[-\frac{3871}{2592} + \frac{1463}{432}\zeta_3 - \frac{21197}{2304}\zeta_5 - \frac{1573}{768}\zeta_3^2 + \frac{33}{8}s_6 - \frac{50831}{1161216}\pi^6 \right. \\ &+ \pi^4 \left(\frac{45023}{207360} - \frac{55}{864}\ln 2 - \frac{55}{432}\ln^2 2 \right) - \pi^2 \left(\frac{35035}{20736} - \frac{1925}{768}\zeta_3 - \frac{803}{144}\alpha_4 \right. \\ &+ \left. \left. \frac{5071}{1728}\ln 2 - \frac{2387}{1152}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A^4 + \left[\frac{731}{192} - \frac{13}{3}\zeta_3 + \frac{19709}{2304}\zeta_5 + \frac{1199}{768}\zeta_3^2 - \frac{23}{8}s_6 \right. \\ &+ \left. \frac{10189}{414720}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{2419}{11520} - \frac{25}{3456}\ln 2 - \frac{259}{3456}\ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{14477}{10368} - \frac{1259}{1152}\zeta_3 \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{53}{18}\alpha_4 + \frac{889}{864}\ln 2 - \frac{665}{576}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A^3 T_F n_f - \left[\frac{7645}{1152} - \frac{61}{24}\zeta_3 - \frac{55}{24}\zeta_5 \right] C_A^2 C_F T_F n_f \\ &+ \frac{23}{128} C_F^3 T_F n_f + \left[\frac{143}{576} + \frac{143}{48}\zeta_3 - \frac{55}{12}\zeta_5 \right] C_A C_F^2 T_F n_f + \left[-\frac{1171}{432} + \frac{89}{72}\zeta_3 - \frac{1091}{576}\zeta_5 \right. \\ &- \left. \frac{19}{64}\zeta_3^2 + \frac{1}{2}s_6 - \frac{761}{241920}\pi^6 + \pi^4 \left(\frac{529}{8640} + \frac{5}{864}\ln 2 - \frac{\ln^2 2}{96} \right) - \pi^2 \left(\frac{737}{2592} - \frac{19}{288}\zeta_3 \right) \right] \end{aligned} \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}\alpha_4 - \frac{\ln 2}{72} - \frac{7}{48}\zeta_3 \ln 2 \Big) \Big] C_A^2 T_F^2 n_f^2 + \left[\frac{583}{144} - \frac{7}{4}\zeta_3 - \frac{5}{6}\zeta_5 \right] C_A C_F T_F^2 n_f^2 - \left[\frac{29}{288} \right. \\
& + \frac{4}{3}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_5 \Big] C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \left[\frac{293}{648} + \frac{\zeta_3}{54} - \frac{2}{405}\pi^4 \right] C_A T_F^3 n_f^3 + \left[-\frac{1}{2} + \frac{\zeta_3}{3} \right] C_F T_F^3 n_f^3 \\
& - \left[\frac{5}{144} - \frac{11}{12}\zeta_3 \right] \frac{d_A^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} + \left[\frac{2}{9} - \frac{13}{6}\zeta_3 \right] \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} n_f + \left[\frac{55}{576}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{253}{144} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{11}{36} \ln 2 + \frac{11}{12} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{869}{216} - \frac{671}{72}\zeta_3 + \frac{11}{6} \ln 2 + \frac{77}{4}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} n_f \\
& + \left[-\frac{1511}{4320}\pi^6 + \pi^4 \left(\frac{13}{8} - \frac{35}{18} \ln 2 - \frac{31}{18} \ln^2 2 \right) - \pi^2 \left(\frac{929}{108} - \frac{827}{36}\zeta_3 - \frac{148}{3}\alpha_4 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{461}{9} \ln 2 - \frac{217}{6}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} T_F n_f + \left[-\frac{5}{144}\pi^6 + \pi^4 \left(\frac{23}{36} - \frac{\ln 2}{9} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{3} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(-\frac{79}{54} + \frac{61}{18}\zeta_3 - \frac{2}{3} \ln 2 - 7\zeta_3 \ln 2 \right) \right] \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} T_F n_f^2 \\
& + \left[\frac{16621}{17280}\pi^6 + \pi^4 \left(-\frac{143}{32} + \frac{385}{72} \ln 2 + \frac{341}{72} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{10219}{432} - \frac{9097}{144}\zeta_3 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{407}{3}\alpha_4 + \frac{5071}{36} \ln 2 - \frac{2387}{24}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} - \left[\frac{11}{36} - \frac{2}{3}\zeta_3 \right] \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} n_f^2.
\end{aligned}$$

Формула (1.72) имеет гораздо более сложную структуру, нежели выражение для β_3 (A.4). В самом деле, помимо рациональных чисел и пропорциональных ζ_3 слагаемых, возникающих при вычислении четырёхпетлевого коэффициента β -функции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, β_3^V содержит намного больше констант высших трансцендентностей, например, веса $w = 6$, таких как π^6 , $\pi^4 \ln^2 2$, $\pi^2 \alpha_4$, $\pi^2 \zeta_3 \ln 2$, $s_6 = \zeta_6 + \zeta_{-5, -1}$. Выражение для кратного значения дзета-функции $\zeta_{-5, -1}$ может быть получено в интегральном представлении посредством дзета-функции Лерха $\Phi(z, s, q)$ [115]:

$$\Phi(z, s, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^k}{(n+q)^s}. \quad (1.73)$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i} = -\ln 2 - (-1)^k \Phi(-1, 1, k). \quad (1.74)$$

Тогда

$$\zeta_{-5, -1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i} = \frac{15}{16} \zeta_5 \ln 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(-1, 1, k)}{k^5}. \quad (1.75)$$

Используя интегральное представление функции Лерха

$$\Phi(z, s, q) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \frac{x^{q-1} (-\ln x)^{s-1}}{1-zx} dx, \quad (1.76)$$

которое справедливо для $\text{Re}(q) > 0$, $\text{Re}(s) > 0$ и $z \in [-1; 1)$ или $\text{Re}(s) > 1$, $z = 1$, можно

получить, что

$$\zeta_{-5,-1} = \frac{15}{16}\zeta_5 \ln 2 - \int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^5} = \frac{15}{16}\zeta_5 \ln 2 - \zeta_6 + \int_0^1 dx \frac{\text{Li}_5(x)}{x+1}, \quad (1.77)$$

$$s_6 = \frac{15}{16}\zeta_5 \ln 2 + \int_0^1 dx \frac{\text{Li}_5(x)}{x+1}. \quad (1.78)$$

Интегральное представление функции s_6 в виде (1.78) было также ранее представлено в работе [116].

По соглашению (см. например [116–120]) трансцендентная константа s_6 наряду с комбинациями констант $\zeta_2 - \zeta_6$, степеней $\ln 2$, а также $\text{Li}_4(1/2)$, $\text{Li}_5(1/2)$, $\text{Li}_6(1/2)$, которые часто возникают при вычислении высших радиационных поправок к различным величинам в $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировок, входит в определение “базисных” констант, через которые могут выражаться любые другие функции с весом $w = 6$ и глубиной $d = 2$, такие как $\zeta_{-4,-2}$ и проч. Другими словами это означает, что интеграл, входящий в представление (1.78), не может быть выражен лишь через комбинации обычных дзета-функций Римана, логарифмов двойки и полилогарифмов веса 4, 5, 6 с аргументом $1/2$ ¹.

Выражение (1.72) было получено ранее в полу-аналитическом виде в работе [25] и содержало погрешности, связанные с численной оценкой трёхпетлевых диаграмм определённых топологий, перенормирующих потенциал [97–99]. Точности данных вычислений не хватало для применения алгоритма PSLQ [121, 122], который позволяет по полученным численным данным однозначно восстанавливать аналитическую структуру поправок ТВ с известными базисными трансцендентными константами. Как мы уже говорили ранее, данная задача была решена в работе [100] при помощи методов, изложенных в [123–126], и алгоритмов ускорения сходимости [127].

В заключение этого раздела отметим ещё один интересный факт: из-за слагаемого $2a_3\beta_0$ в (1.66) β_3^V содержит дополнительные цветовые структуры $C_A d_F^{abcd} d_A^{abcd}/N_A$, $C_A d_F^{abcd} d_F^{abcd} n_f/N_A$, $d_F^{abcd} d_A^{abcd} T_F n_f/N_A$ и $d_F^{abcd} d_F^{abcd} T_F n_f^2/N_A$, которые отсутствуют в аналитическом выражении для четырёхпетлевого коэффициента β_3 в $\overline{\text{MS}}$ -схеме (A.4).

¹ Задача вычисления данного интеграла в аналитическом виде в терминах известных трансцендентных констант и специальных функций (отличных от комбинаций упомянутых выше “базисных” констант) интересна как с точки зрения вычислительной математики и теории чисел, так и с точки зрения физики (в частности, при аналитических вычислениях диаграмм Фейнмана). Более детальное исследование этого вопроса находится в процессе изучения.

1.5.2. Функция Адлера и R -отношение в V -схеме

Поскольку потенциал (1.39) и связанная с ним калибровочно-инвариантная V -схема определена в евклидовой области переданных импульсов, то мы можем непосредственно использовать её для нахождения функции Адлера $D(a_s(Q^2))$ e^+e^- аннигиляции в адроны в этой схеме, также определённой в пространственноподобной евклидовой области.

Начнём с вычисления аналитического четырёхпетлевого выражения для несинглетного вклада $D_V^{NS}(a_{s,V})$ в функцию Адлера в V -схеме. Пользуясь ренорминвариантностью величины $D^{NS}(a_s(Q^2))$ и учитывая соотношение (1.61) между константами связи в V и $\overline{\text{MS}}$ -схеме, получаем следующие соотношения:

$$d_{1,V}^{NS} = d_1^{NS}, \quad d_{2,V}^{NS} = d_2^{NS} - a_1 d_1^{NS}, \quad d_{3,V}^{NS} = d_3^{NS} - 2a_1 d_2^{NS} + (2a_1^2 - a_2) d_1^{NS}, \quad (1.79)$$

$$d_{4,V}^{NS} = d_4^{NS} - 3a_1 d_3^{NS} + (5a_1^2 - 2a_2) d_2^{NS} + (5a_1 a_2 - 5a_1^3 - a_3) d_1^{NS}, \quad (1.80)$$

где коэффициенты $d_{k,V}^{NS}$ и d_k^{NS} определены в V и $\overline{\text{MS}}$ -схемах соответственно.

Соотношения, аналогичные (1.79-1.80), верны не только для произвольных калибровочно-инвариантных, но также и для калибровочно-неинвариантных схем перенормировок (при этом коэффициенты a_k в (1.61) должны быть заменены их аналогами, в общем случае зависящими от калибровочного параметра). Естественно, подобные соотношения будут справедливыми для любых ренорминвариантных величин, не содержащих размерных параметров теории (в противном случае недостаточно знать лишь соотношения между константами связи в двух рассматриваемых схемах, а необходимо вычислять также константы перенормировок этих параметров, например, масс, в данных схемах). К примеру, ниже аналоги выражений (1.79-1.80) будут использоваться нами для определения коэффициентной функции Бьёркена в V -схеме и в одной из калибровочно-неинвариантных схем импульсных вычитаний.

Учитывая поправки (1.6-1.8) к несинглетному вкладу в функцию Адлера, вычисленные в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в $SU(N_c)$ КХД, и соотношения (1.79-1.80), находим:

$$D_V^{NS}(a_{s,V}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{k,V}^{NS} a_{s,V}^k, \quad (1.81)$$

$$d_{1,V}^{NS} = \frac{3}{4} C_F, \quad (1.82)$$

$$d_{2,V}^{NS} = -\frac{3}{32} C_F^2 + \left(\frac{307}{96} - \frac{11}{4} \zeta_3 \right) C_F C_A + \left(-\frac{23}{24} + \zeta_3 \right) C_F T_F n_f, \quad (1.83)$$

$$d_{3,V}^{NS} = -\frac{69}{128} C_F^3 + \left(-\frac{175}{96} - \frac{143}{16} \zeta_3 + \frac{55}{4} \zeta_5 \right) C_F^2 C_A \quad (1.84)$$

$$+ \left(\frac{621}{32} - \frac{1403}{96} \zeta_3 - \frac{55}{24} \zeta_5 - \frac{3}{16} \pi^2 + \frac{3}{256} \pi^4 \right) C_F C_A^2 + \left(\frac{3}{2} - \zeta_3 \right) C_F T_F^2 n_f^2$$

$$+ \left(-\frac{375}{32} + \frac{205}{24} \zeta_3 + \frac{5}{6} \zeta_5 \right) C_F C_A T_F n_f + \left(\frac{29}{96} + 4\zeta_3 - 5\zeta_5 \right) C_F^2 T_F n_f,$$

$$\begin{aligned}
d_{4,V}^{NS} = & \left[\frac{4157}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3 \right] C_F^4 - \left[\frac{3335}{512} + \frac{139}{128}\zeta_3 - \frac{2255}{32}\zeta_5 + \frac{1155}{16}\zeta_7 \right] C_F^3 C_A \quad (1.85) \\
& + \left(-\frac{498269}{18432} - \frac{17513}{192}\zeta_3 + 100\zeta_5 + \frac{1155}{32}\zeta_7 + \frac{3}{64}\pi^2 - \frac{3}{1024}\pi^4 \right) C_F^2 C_A^2 \\
& + \left[\frac{668335}{4608} - \frac{101621}{1152}\zeta_3 - \frac{89119}{1536}\zeta_5 + \frac{34199}{1536}\zeta_3^2 - \frac{385}{64}\zeta_7 - \frac{27}{16}s_6 + \frac{4621}{258048}\pi^6 \right. \\
& + \pi^4 \left(\frac{1}{90} - \frac{11}{128}\zeta_3 + \frac{5}{192}\ln 2 + \frac{5}{96}\ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(-\frac{4183}{4608} + \frac{179}{512}\zeta_3 - \frac{73}{32}\alpha_4 \right. \\
& \left. + \frac{461}{384}\ln 2 - \frac{217}{256}\zeta_3 \ln 2 \right) \left. \right] C_F C_A^3 + \left(\frac{287}{256} + \frac{17}{8}\zeta_3 - \frac{235}{8}\zeta_5 + \frac{105}{4}\zeta_7 \right) C_F^3 T_F n_f \\
& + \left[-\frac{201725}{1536} + \frac{41071}{576}\zeta_3 + \frac{87847}{1536}\zeta_5 - \frac{20225}{1536}\zeta_3^2 + \frac{35}{16}\zeta_7 + \frac{9}{16}s_6 - \frac{761}{215040}\pi^6 \right. \\
& + \pi^4 \left(\frac{109}{4608} + \frac{\zeta_3}{32} + \frac{5}{768}\ln 2 - \frac{3}{256}\ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{367}{2304} - \frac{109}{256}\zeta_3 + \frac{3}{8}\alpha_4 + \frac{\ln 2}{64} \right. \\
& \left. + \frac{21}{128}\zeta_3 \ln 2 \right) \left. \right] C_F C_A^2 T_F n_f + \left(-\frac{125}{384} - \frac{281}{24}\zeta_3 + \frac{25}{2}\zeta_5 + \zeta_3^2 \right) C_F^2 T_F^2 n_f^2 \\
& + \left(\frac{12277}{1152} + \frac{1117}{16}\zeta_3 - \frac{145}{2}\zeta_5 - \frac{11}{4}\zeta_3^2 - \frac{105}{8}\zeta_7 \right) C_F^2 C_A T_F n_f + \left(\frac{81103}{2304} \right. \\
& \left. - \frac{4859}{288}\zeta_3 - \frac{35}{2}\zeta_5 + \frac{11}{6}\zeta_3^2 - \frac{\pi^4}{180} \right) C_F C_A T_F^2 n_f^2 - \left(\frac{67}{24} - \frac{7}{6}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_5 \right) C_F T_F^3 n_f^3 \\
& + \left(\frac{3}{16} - \frac{\zeta_3}{4} - \frac{5}{4}\zeta_5 \right) \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{d_R} + \left(-\frac{13}{16} - \zeta_3 + \frac{5}{2}\zeta_5 \right) \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{d_R} n_f \\
& + \left[-\frac{1511}{3840}\pi^6 + \pi^4 \left(\frac{117}{64} - \frac{35}{16}\ln 2 - \frac{31}{16}\ln^2 2 \right) - \pi^2 \left(\frac{929}{96} - \frac{827}{32}\zeta_3 - \frac{111}{2}\alpha_4 \right) \right. \\
& \left. + \frac{461}{8}\ln 2 - \frac{651}{16}\zeta_3 \ln 2 \right] C_F \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} + \left[-\frac{5\pi^6}{128} + \pi^4 \left(\frac{23}{32} - \frac{\ln 2}{8} + \frac{3}{8}\ln^2 2 \right) \right. \\
& \left. + \pi^2 \left(-\frac{79}{48} + \frac{61}{16}\zeta_3 - \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{63}{8}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_F \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} n_f.
\end{aligned}$$

Сделаем несколько замечаний к полученным формулам, которые будут важны в дальнейшем при обсуждении результатов 2-ой главы. Во-первых, аналитическое выражение для $d_{4,V}^{NS}$ содержит все комбинации трансцендентных констант, входящие в формулу (1.72) для β_3^V , за исключением дзета-функции ζ_7 наибольшего веса $w = 7$, появляющейся изначально при вычислениях коэффициента d_4^{NS} в $\overline{\text{MS}}$ -схеме (1.8). Во-вторых, в отличие от четырёхпетлевых результатов для d_4^{NS} , аналитическое выражение для $d_{4,V}^{NS}$ включает в себя две дополнительные цветные структуры типа $C_F d_F^{abcd} d_A^{abcd}/N_A$ и $C_F d_F^{abcd} d_F^{abcd} n_f/N_A$, которые возникают при перемножении a_3 и d_1 (см. 1.80).

Ренорминвариантность $D(a_s)$ -функции также позволяет найти её синглетный вклад в V -схеме. Это обстоятельство приводит к следующим результатам:

$$d_{3,V}^{SI} = d_3^{SI}, \quad (1.86)$$

$$d_{4,V}^{SI} = d_4^{SI} - 3a_1 d_3^{SI} = \left[\left(-\frac{13}{64} - \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{8}\zeta_5 \right) C_F + \left(\frac{3211}{4608} - \frac{383}{384}\zeta_3 - \frac{11}{32}\zeta_3^2 + \frac{45}{64}\zeta_5 \right) C_A + \left(-\frac{47}{288} + \frac{19}{96}\zeta_3 - \frac{5}{16}\zeta_5 + \frac{\zeta_3^2}{8} \right) T_F n_f \right] \frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R}, \quad (1.87)$$

где синглетные поправки d_3^{SI} и d_4^{SI} , вычисленные в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [43, 48], приведены в (1.11-1.12).

Учёт π^2 -эффектов аналитического продолжения (1.18) из евклидовой области энергий в минковскую, а также ренорминвариантность $R(s)$ -отношения однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны, приводят к соотношениям:

$$r_{1,V}^{NS} = d_{1,V}^{NS}, \quad r_{2,V}^{NS} = d_{2,V}^{NS}, \quad (1.88)$$

$$r_{3,V}^{NS} = d_{3,V}^{NS} - \frac{\pi^2}{3} d_1 \beta_0^2, \quad r_{3,V}^{SI} = d_{3,V}^{SI}, \quad (1.89)$$

$$r_{4,V}^{NS} = d_{4,V}^{NS} - \pi^2 \left(d_{2,V}^{NS} \beta_0^2 + \frac{5}{6} d_1 \beta_1 \beta_0 \right), \quad r_{4,V}^{SI} = d_{4,V}^{SI}. \quad (1.90)$$

Численный анализ полученных соотношений для реалистичных случаев $SU(3)$ и $U(1)$ группы будет рассмотрен ниже.

1.5.3. Коэффициентная функция Бьёркена в V-схеме

Действуя схожим предыдущему разделу образом, т.е. пользуясь аналогами соотношений (1.79-1.80) для функции $C_{Bjp}(a_s(Q^2))$, учитывая $\overline{\text{MS}}$ результаты вычислений (1.27-1.30), (1.31), мы получаем аналитическое четырёхпетлевое выражение для несинглетного и синглетного вклада в коэффициентную функцию правила сумм Бьёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в V-схеме для случая калибровочной группы $SU(N_c)$:

$$C_{Bjp,V}^{NS}(a_{s,V}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,V}^{NS} a_{s,V}^k, \quad C_{Bjp,V}^{SI}(a_{s,V}) = \sum_{k=4}^{\infty} c_{k,V}^{SI} a_{s,V}^k, \quad (1.91)$$

$$c_{1,V}^{NS} = -\frac{3}{4} C_F, \quad (1.92)$$

$$c_{2,V}^{NS} = \frac{21}{32} C_F^2 - \frac{19}{24} C_F C_A + \frac{1}{12} C_F T_F n_f, \quad (1.93)$$

$$c_{3,V}^{NS} = -\frac{3}{128} C_F^3 + \left(\frac{295}{288} - \frac{11}{12} \zeta_3 \right) C_F^2 C_A + \left(-\frac{13}{36} + \frac{\zeta_3}{3} \right) C_F^2 T_F n_f + \left(-\frac{4231}{1152} + \frac{11}{32} \zeta_3 + \frac{55}{24} \zeta_5 + \frac{3}{16} \pi^2 - \frac{3}{256} \pi^4 \right) C_F C_A^2 - \frac{5}{24} C_F T_F^2 n_f^2 + \left(\frac{73}{36} - \frac{\zeta_3}{8} - \frac{5}{6} \zeta_5 \right) C_F C_A T_F n_f, \quad (1.94)$$

$$c_{4,V}^{NS} = \left(-\frac{4823}{2048} - \frac{3}{8} \zeta_3 \right) C_F^4 + \left(-\frac{857}{1152} - \frac{971}{96} \zeta_3 + \frac{1045}{48} \zeta_5 \right) C_F^3 C_A + \left(\frac{776809}{55296} + \frac{4921}{384} \zeta_3 - \frac{1375}{144} \zeta_5 - \frac{385}{16} \zeta_7 - \frac{21}{64} \pi^2 + \frac{21}{1024} \pi^4 \right) C_F^2 C_A^2 \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{247307}{13824} + \frac{4579}{1152}\zeta_3 + \frac{5557}{4608}\zeta_5 - \frac{3223}{1536}\zeta_3^2 + \frac{385}{64}\zeta_7 + \frac{27}{16}s_6 - \frac{4621}{258048}\pi^6 \right. \\
& + \pi^4 \left(\frac{2953}{46080} - \frac{5}{192}\ln 2 - \frac{5}{96}\ln^2 2 \right) - \pi^2 \left(\frac{1361}{4608} - \frac{525}{512}\zeta_3 - \frac{73}{32}\alpha_4 + \frac{461}{384}\ln 2 \right. \\
& \left. \left. - \frac{217}{256}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_F C_A^3 + \left(\frac{317}{144} + \frac{109}{24}\zeta_3 - \frac{95}{12}\zeta_5 \right) C_F^3 T_F n_f - \left(\frac{14177}{1728} + \frac{739}{144}\zeta_3 \right. \\
& \left. - \frac{205}{72}\zeta_5 - \frac{35}{4}\zeta_7 \right) C_F^2 C_A T_F n_f + \left[\frac{47693}{3456} - \frac{77}{18}\zeta_3 + \frac{851}{512}\zeta_5 + \frac{1921}{1536}\zeta_3^2 - \frac{35}{16}\zeta_7 \right. \\
& \left. - \frac{9}{16}s_6 + \frac{761}{215040}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{235}{4608} + \frac{5}{768}\ln 2 - \frac{3}{256}\ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{641}{2304} - \frac{19}{256}\zeta_3 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{3}{8}\alpha_4 - \frac{\ln 2}{64} - \frac{21}{128}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_F C_A^2 T_F n_f + \left(\frac{1891}{3456} - \frac{\zeta_3}{36} \right) C_F^2 T_F^2 n_f^2 \\
& + \left(-\frac{8309}{3456} + \frac{9}{8}\zeta_3 - \frac{35}{36}\zeta_5 - \frac{\zeta_3^2}{6} + \frac{\pi^4}{180} \right) C_F C_A T_F^2 n_f^2 + \frac{5}{72} C_F T_F^3 n_f^3 \\
& + \left(-\frac{3}{16} + \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{4}\zeta_5 \right) \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{d_R} + \left(\frac{13}{16} + \zeta_3 - \frac{5}{2}\zeta_5 \right) \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{d_R} n_f + \left[\frac{1511}{3840}\pi^6 \right. \\
& \left. + \pi^4 \left(-\frac{117}{64} + \frac{35}{16}\ln 2 + \frac{31}{16}\ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{929}{96} - \frac{827}{32}\zeta_3 - \frac{111}{2}\alpha_4 + \frac{461}{8}\ln 2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{651}{16}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_F \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} + \left[\frac{5}{128}\pi^6 + \pi^4 \left(-\frac{23}{32} + \frac{\ln 2}{8} - \frac{3}{8}\ln^2 2 \right) \right. \\
& \left. + \pi^2 \left(\frac{79}{48} - \frac{61}{16}\zeta_3 + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{63}{8}\zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_F \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} n_f, \\
& c_{4,V}^{SI} = c_4^{SI} = \frac{1}{9}\beta_0 d^{abc} d^{abc}. \tag{1.96}
\end{aligned}$$

Представленные выражения для несинглетных вкладов в функции Адлера и Бьёркена в V-схеме имеют много общего. Например, $\mathcal{O}(a_s^3)$ коэффициенты (1.84) и (1.94) в слагаемых при $C_F C_A^2$ -структуре содержат одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку, вклады с пропорциональными ζ_5 , π^2 и π^4 -членами. На четырёхпетлевом уровне подобным свойством обладают все трансцендентные слагаемые, включающие следующие комбинации π^6 , s_6 , $\pi^4 \ln 2$, $\pi^4 \ln^2 2$, $\pi^2 \alpha_4$, $\pi^2 \ln 2$ и $\pi^2 \zeta_3 \ln 2$ (см. (1.85) и (1.95)). Более того, эта же особенность наблюдается и для целых вкладов, пропорциональных цветовым инвариантам высших порядков $d_F^{abcd} d_A^{abcd}/N_c$, $d_F^{abcd} d_F^{abcd} n_f/N_c$, $C_F d_F^{abcd} d_A^{abcd}/N_A$, $C_F d_F^{abcd} d_F^{abcd} n_f/N_A$. В частности, вышесказанные замечания приведут к автоматическому сокращению этих трансцендентных комбинаций и цветовых структур в суммах $d_{3,V}^{NS} + c_{3,V}^{NS}$ и $d_{4,V}^{NS} + c_{4,V}^{NS}$. Этот факт проявится в дальнейших наших исследованиях в следующей главе.

Отличие формул (1.85) и (1.95) состоит прежде всего в том, что последняя не содержит членов типа $\pi^4 \zeta_3$. К тому же, по сравнению с функцией Адлера проявление следов V-схемы в синглетных поправках к коэффициентной функции Бьёркена не наблюдается в $N^3\text{LO}$ порядке ТВ (см. (1.87) и (1.96)).

1.6. Рассмотрение mMOM-схемы импульсных вычитаний

До этого мы рассматривали только калибровочно-инвариантные схемы перенормировок ($\overline{\text{MS}}$ и V-схему) в КХД. Как следствие, наблюдаемые ренорминвариантные величины в этих схемах не зависели от калибровки. Однако, зачастую в теоретических и феноменологических приложениях КХД используются и калибровочно-неинвариантные схемы вычитаний УФ расходимостей, такие как схемы импульсных вычитаний (MOM) вне массовой поверхности [128–131]. Преимущество таких схем состоит в возможности непосредственного учёта влияния пороговых эффектов, а также использования любых известных процедур регуляризаций, помимо размерной, в том числе и регуляризации на решётке (см. например [132, 133]). $\overline{\text{MS}}$ -схема лишена такой возможности. При этом, однако, в рассматриваемых порядках ТВ физические величины начинают явно зависеть от калибровки² (обычно, начиная с двухпетлевого уровня), например, сечение e^+e^- аннигиляции в адроны [134]. Более того, РГ β -функция и аномальные размерности также начинают зависеть от калибровочного параметра ξ . Различные варианты MOM-схемы были использованы для вычисления двух-, трёх- и четырёхпетлевых коэффициентов этих функций в КХД [131, 135–138]. В частности, зависимость β -функции от калибровки активно применяется при изучении возможных “конформных окон”, связанных с поведением вблизи ИК фиксированных точек [139, 140]³.

В современной литературе исследуется целый класс MOM-подобных схем. Например, симметричная [128, 129] и асимметричная [141] MOM-схемы, MOM ggg и MOM $gq\bar{q}$ -схемы, определяемые из рассмотрения трёхглюонной и глюон-кварк-антикварковой вершины (см. например [134]), и прочие. Выбор той или иной схемы может зависеть как от вершины, к которой применяется процедура вычитания УФ расходимостей, возникающих при перенормировке, так и от фиксации кинематических условий для внешних ног. Таким образом, в принципе существует бесконечно много способов определения MOM-схем.

В данной работе мы остановимся прежде всего на рассмотрении калибровочно-неинвариантной минимальной MOM-схемы, или как её принято называть кратко mMOM-схемы. Данная схема была предложена в работе [136] и широко применялась как при анализе многопетлевых вычислений в КХД [25, 47, 134, 137, 138, 142], так и при расчётах, выполненных на

² Полный ряд ТВ для ренорминвариантных величин, естественно, по-прежнему остаётся не зависимым как от калибровки, так и от схемы вычитаний УФ расходимостей.

³ Модельная ситуация с нулевой β -функцией соответствует эффективному восстановлению конформной симметрии безмассовой КХД, нарушенной из-за применения процедуры перенормировки. В реальной же пертурбативной теории сильных взаимодействий с отличной от нуля β -функцией эта ИК фиксированная точка не наблюдается.

решётке [143–146]. Основное требование, отличающее её от других схем импульсных вычитаний, состоит в том, что константа перенормировки глюон–дух–антидуховой вершины Z_{cg} в этой схеме полагается равной этой же величине, рассчитанной в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$Z_{cg}^{\text{mMOM}}(\alpha_s^{\text{mMOM}}, \epsilon) = Z_{cg}^{\overline{\text{MS}}}(\alpha_s^{\overline{\text{MS}}}, \epsilon) \quad (1.97)$$

где $2\epsilon = 4 - D$. Данное условие во многом было мотивировано свойством неперенормируемости глюон–дух–антидуховой вершины в калибровке Ландау $\xi = 0$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [147] ($Z_{cg}^{\overline{\text{MS}}} = 1$). Равенство (1.97) значительно упрощает многопетлевые вычисления в рамках mMOM-схемы.

Введём следующие обозначения для констант перенормировок, посредством которых связаны голые неперенормированные (индекс B) и конечные перенормированные величины:

$$A_{B,\mu}^a = \sqrt{Z_A} A_\mu^a, \quad c_B^a = \sqrt{Z_c} c^a, \quad g_{s,B} = \mu^\epsilon Z_g g_s, \quad \xi_B = Z_\xi \xi, \quad (1.98)$$

где A_μ^a , c^a — перенормированные поля глюонов и духов, g_s — константа связи, ξ — калибровочный параметр, входящий в лагранжиан КХД в форме калибровки Лоренца $(\partial_\mu A_\mu^a)^2/(2\xi)$. Мы будем работать в рамках теории с линейной ковариантной калибровкой, т.е. когда константа перенормировки члена $(\partial_\mu A_\mu^a)^2/(2\xi)$ равна единице. В таком случае из тождеств Славнова–Тейлора следует, что $Z_\xi = Z_A$. Явный вид лагранжиана взаимодействия с духами Фаддеева–Попова $g_s f^{abc}(\partial^\mu \bar{c}^a) c^b A_\mu^c$ диктует нам следующую связь констант перенормировок из соотношений (1.98) с константой перенормировки глюон–дух–антидуховой вершины:

$$Z_{cg} = Z_g Z_c \sqrt{Z_A}. \quad (1.99)$$

Общее требование всех MOM-подобных схем состоит в том, что вычеты пропагаторов перенормированных полей в евклидовой точке $Q^2 = -q^2 = \mu^2$ равны единице. Перенормированные двухточечные корреляторы полей глюонов и духов могут быть представлены в следующем виде:

$$G_{ab}^{\mu\nu}(q) = \frac{i\delta_{ab}}{q^2} \left[\left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{1}{1 + \Pi_A(q^2)} - \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right], \quad (1.100)$$

$$\Delta^{ab}(q) = \frac{i\delta^{ab}}{q^2} \frac{1}{1 + \Pi_c(q^2)}, \quad (1.101)$$

где $\Pi_A(q^2)$ и $\Pi_c(q^2)$ — их собственно–энергетические функции, возникающие в (1.100) и (1.101) при суммировании всех одночастично–неприводимых диаграмм, перенормирующих полные пропагаторы рассматриваемых полей. Тогда условия перенормировки приводят к равенствам

$$\Pi_A^{\text{mMOM}}(q^2 = -\mu^2) = 0, \quad \Pi_c^{\text{mMOM}}(q^2 = -\mu^2) = 0, \quad (1.102)$$

которые обеспечивают совпадение перенормированных пропагаторов с их древесными выражениями в точке перенормировки.

Учитывая первые два равенства в (1.98) и неперенормируемость продольной части пропагатора глюонов, приходим к соотношениям, связывающим перенормируемые и неперенормируемые собственные функции глюонов и духов:

$$1 + \Pi_A^{\text{mMOM}}(a_s, \xi) = Z_A^{\text{mMOM}}(a_s, \xi, \epsilon) \left(1 + \Pi_A^B(a_s^B(a_s), \xi^B(\xi), \epsilon) \right), \quad (1.103)$$

$$1 + \Pi_c^{\text{mMOM}}(a_s, \xi) = Z_c^{\text{mMOM}}(a_s, \xi, \epsilon) \left(1 + \Pi_c^B(a_s^B(a_s), \xi^B(\xi), \epsilon) \right). \quad (1.104)$$

Здесь (и только здесь) $a_s = a_s(\mu^2)$, $\xi = \xi(\mu^2)$ обозначают величины, определённые в mMOM-схеме.

Соотношения, аналогичные (1.103) и (1.104), также будут выполняться и в $\overline{\text{MS}}$ -схеме. Принимая во внимание данный факт, а также условия (1.102) вкупе с (1.103), (1.104), нетрудно найти отношение констант перенормировки в двух рассматриваемых схемах для калибровочного поля A_μ^a и поля духов c^a .

Используя теперь требование (1.97), третье равенство в (1.98) и связь (1.99), получаем соотношение между константами связи в mMOM и $\overline{\text{MS}}$ -схемах [136, 138, 148]:

$$a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2) = \frac{Z_A^{\text{mMOM}}}{Z_A^{\overline{\text{MS}}}} \left(\frac{Z_c^{\text{mMOM}}}{Z_c^{\overline{\text{MS}}}} \right)^2 a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2). \quad (1.105)$$

Таким образом, для того чтобы перейти от $a_s^{\overline{\text{MS}}}$ к a_s^{mMOM} , нужно знать только константы перенормировок глюонных и духовых полей, но не вершин. Используя найденные на предыдущем этапе отношения $Z_A^{\text{mMOM}}/Z_A^{\overline{\text{MS}}}$ и $Z_c^{\text{mMOM}}/Z_c^{\overline{\text{MS}}}$, выраженные через собственно-энергетические функции $\Pi_A^{\overline{\text{MS}}}$ и $\Pi_c^{\overline{\text{MS}}}$, окончательно приходим к разложениям:

$$a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2) = \frac{a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2)}{\left(1 + \Pi_A^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2), \xi^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2)) \right) \left(1 + \Pi_c^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2), \xi^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2)) \right)^2}, \quad (1.106)$$

$$\xi^{\text{mMOM}}(\mu^2) = \left(1 + \Pi_A^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2), \xi^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2)) \right) \xi^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2). \quad (1.107)$$

Функции $\Pi_A^{\overline{\text{MS}}}$ и $\Pi_c^{\overline{\text{MS}}}$ были вычислены в α_s^3 и α_s^4 -приближении с произвольной калибровкой $\xi^{\overline{\text{MS}}}$ в [135] и [148]. Результаты данных вычислений позволяют найти явный вид соотношений (1.106-1.107). Однако, для наших дальнейших целей удобно будет представлять результаты, выраженные в терминах a_s^{mMOM} и $\xi = \xi^{\text{mMOM}}$. Для этого используем формулы пересчёта для константы связи и калибровки при переходе от $\overline{\text{MS}}$ к mMOM-схеме, представленные в Приложении Б. Таким образом, получаем следующие представления $a_s^{\overline{\text{MS}}}$ и $\xi^{\overline{\text{MS}}}$ [27]:

$$a_s^{\overline{\text{MS}}} = a_s^{\text{mMOM}} + b_1^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}})^2 + b_2^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}})^3 + b_3^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}})^4, \quad (1.108)$$

$$b_1^{\text{mMOM}} = \left[-\frac{169}{144} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{16}\xi^2 \right] C_A + \frac{5}{9} T_F n_f, \quad (1.109)$$

$$b_2^{\text{mMOM}} = \left[-\frac{18941}{20736} + \frac{39}{128}\zeta_3 + \left(\frac{889}{2304} - \frac{11}{64}\zeta_3 \right) \xi + \left(\frac{203}{2304} + \frac{3}{128}\zeta_3 \right) \xi^2 - \frac{3}{256}\xi^3 \right] C_A^2 \quad (1.110)$$

$$+ \left[-\frac{107}{648} + \frac{\zeta_3}{2} - \frac{5}{36}\xi - \frac{5}{72}\xi^2 \right] C_A T_F n_f + \left[\frac{55}{48} - \zeta_3 \right] C_F T_F n_f + \frac{25}{81} T_F^2 n_f^2,$$

$$b_3^{\text{mMOM}} = \left[-\frac{1935757}{2985984} + \frac{7495}{18432}\zeta_3 + \frac{7805}{12288}\zeta_5 + \left(\frac{4877}{36864} - \frac{611}{1536}\zeta_3 + \frac{295}{1024}\zeta_5 \right) \xi \right. \quad (1.111)$$

$$+ \left(\frac{17315}{110592} - \frac{47}{768}\zeta_3 + \frac{175}{6144}\zeta_5 \right) \xi^2 - \left(\frac{233}{4608} - \frac{59}{1536}\zeta_3 - \frac{5}{3072}\zeta_5 \right) \xi^3$$

$$+ \left(-\frac{235}{36864} - \frac{5}{6144}\zeta_3 - \frac{35}{12288}\zeta_5 \right) \xi^4 \left. \right] C_A^3 + \left[-\frac{143}{288} - \frac{37}{24}\zeta_3 + \frac{5}{2}\zeta_5 \right] C_F^2 T_F n_f$$

$$+ \left[\frac{25547}{20736} + \frac{107}{144}\zeta_3 - \frac{5}{4}\zeta_5 - \left(\frac{55}{128} - \frac{3}{8}\zeta_3 \right) \xi - \left(\frac{55}{256} - \frac{3}{16}\zeta_3 \right) \xi^2 \right] C_F C_A T_F n_f$$

$$+ \left[\frac{199}{31104} - \frac{223}{384}\zeta_3 - \frac{5}{6}\zeta_5 + \left(\frac{833}{13824} + \frac{11}{144}\zeta_3 \right) \xi - \left(\frac{143}{6912} + \frac{9}{128}\zeta_3 \right) \xi^2 - \frac{5}{1152}\xi^3 \right.$$

$$+ \left. \frac{5}{2304}\xi^4 \right] C_A^2 T_F n_f + \left[\frac{1235}{15552} + \frac{13}{36}\zeta_3 + \left(-\frac{19}{216} - \frac{1}{9}\zeta_3 \right) \xi - \frac{25}{432}\xi^2 \right] C_A T_F^2 n_f^2$$

$$+ \left[\frac{1249}{2592} - \frac{11}{18}\zeta_3 \right] C_F T_F^2 n_f^2 + \frac{125}{729} T_F^3 n_f^3,$$

$$\xi^{\overline{\text{MS}}} = \xi^{\text{mMOM}} \left(1 + \eta_1^{\text{mMOM}} a_s^{\text{mMOM}} + \eta_2^{\text{mMOM}} (a_s^{\text{mMOM}})^2 \right), \quad (1.112)$$

$$\eta_1^{\text{mMOM}} = \left[\frac{97}{144} + \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{16}\xi^2 \right] C_A - \frac{5}{9} T_F n_f, \quad (1.113)$$

$$\eta_2^{\text{mMOM}} = \left[\frac{5591}{4608} - \frac{3}{16}\zeta_3 - \left(\frac{121}{1536} - \frac{\zeta_3}{8} \right) \xi + \frac{7}{256}\xi^2 + \frac{7}{256}\xi^3 + \frac{1}{256}\xi^4 \right] C_A^2 \quad (1.114)$$

$$+ \left[-\frac{371}{576} - \frac{\zeta_3}{2} \right] C_A T_F n_f + \left[-\frac{55}{48} + \zeta_3 \right] C_F T_F n_f.$$

Отметим, что как и должно быть, калибровка входит только в неабелеву часть коэффициентов b_k^{mMOM} и η_k^{mMOM} . Выражения, аналогичные (1.108) и (1.112), впервые были получены в работах [136, 138, 148], но с зависимостью от калибровки, определённой в $\overline{\text{MS}}$ -схеме.

Используя эти результаты, не составляет особого труда получить трёхпетлевое аналитическое выражение для β -функции в mMOM-схеме для случая $SU(N_c)$ -группы с произвольной калибровкой $\xi = \xi^{\text{mMOM}}$. Аналогом уравнения (1.63) на случай калибровочно-неинвариантных схем перенормировок является соотношение вида:

$$\beta^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}) = \beta^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}) \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial a_s^{\overline{\text{MS}}}} + \xi^{\overline{\text{MS}}} \gamma_\xi^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}, \xi^{\overline{\text{MS}}}) \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial \xi^{\overline{\text{MS}}}} \Big|_{\overline{\text{MS}} \rightarrow \text{mMOM}}, \quad (1.115)$$

где аномальная размерность линейной ковариантной калибровки $\gamma_\xi = \partial \ln \xi / \partial \ln \mu^2$ совпадает

с аномальной размерностью глюонного поля $\gamma_A A_\mu^a = 2\partial A_\mu^a / \partial \ln \mu^2$. В терминах константы перенормировки Z_A эти определения могут быть переписаны в виде $\gamma_\xi = \gamma_A = -\partial \ln Z_A / \partial \ln \mu^2$. Аномальная размерность γ_ξ наряду с β -функцией ответственна за бег калибровки в зависимости от масштаба. В том, что параметр ξ эволюционирует при изменении энергии, нет ничего странного. Действительно, значения калибровки фиксированы лишь в точке перенормировки $q^2 = -\mu^2$ и начинают изменяться при удалении от неё.

Интересующее нас трёхпетлевое аналитическое выражение для γ_ξ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме известно благодаря вычислениям, сделанным в [54]. Учитывая эти результаты, а также выражение для $\beta^{\overline{\text{MS}}}$ -функции в 3-ем порядке ТВ [53, 54] и соотношения (1.108) и (1.112), находим:

$$\beta_0^{\text{mMOM}} = \frac{11}{12} C_A - \frac{1}{3} T_F n_f, \quad (1.116)$$

$$\beta_1^{\text{mMOM}} = \left[\frac{17}{24} - \frac{13}{192} \xi - \frac{5}{96} \xi^2 + \frac{1}{64} \xi^3 \right] C_A^2 - \frac{1}{4} C_F T_F n_f \quad (1.117)$$

$$+ \left[-\frac{5}{12} + \frac{1}{24} \xi + \frac{1}{24} \xi^2 \right] C_A T_F n_f,$$

$$\beta_2^{\text{mMOM}} = \left[\frac{9655}{4608} - \frac{143}{512} \zeta_3 - \left(\frac{1097}{6144} - \frac{33}{512} \zeta_3 \right) \xi - \left(\frac{725}{6144} - \frac{13}{512} \zeta_3 \right) \xi^2 \right] \quad (1.118)$$

$$+ \left(\frac{21}{2048} - \frac{3}{512} \zeta_3 \right) \xi^3 + \frac{55}{6144} \xi^4 \left] C_A^3 + \frac{1}{32} C_F^2 T_F n_f + \left[\frac{23}{96} + \frac{\zeta_3}{6} \right] C_A T_F^2 n_f^2$$

$$+ \left[-\frac{2009}{1152} - \frac{137}{384} \zeta_3 + \frac{37}{384} \xi + \left(\frac{23}{256} - \frac{\zeta_3}{128} \right) \xi^2 + \frac{1}{128} \xi^3 - \frac{1}{768} \xi^4 \right] C_A^2 T_F n_f$$

$$+ \left[-\frac{641}{576} + \frac{11}{12} \zeta_3 + \frac{1}{16} \xi + \frac{3}{64} \xi^2 \right] C_A C_F T_F n_f + \left[\frac{23}{72} - \frac{\zeta_3}{3} \right] C_F T_F^2 n_f^2.$$

Коэффициенты (1.116-1.118) совпадают с аналогичными, представленными в работах [136] (где цветовые структуры разложены по степеням N_c) и [138, 148] (где оператор Казимира удерживается в явном виде). Данное обстоятельство служит независимой проверкой справедливости полученных разложений (1.108) и (1.112), используемых нами в последующих разделах.

Как и следовало ожидать, β -функция в mMOM-схеме (как и в большинстве калибровочно-неинвариантных схем (см. например [129, 135])) зависит от калибровки, начиная с двухпетлевого уровня. Действительно, аналитическое выражение для β_1^{mMOM} представляет собой полином 3-ей степени по ξ^{mMOM} . Интересно отметить, что только при $\xi^{\text{mMOM}} = 0, -1$ коэффициент β_1^{mMOM} совпадает с $\beta_1^{\overline{\text{MS}}}$. Однако, для коэффициента β_2^{mMOM} это уже неверно.

В отличие от поправки третьего порядка β_2^V (1.71) к β -функции в калибровочно-инвариантной V -схеме, коэффициент β_2^{mMOM} не содержит дополнительных трансцендентных констант, пропорциональных π^2 и π^4 . Зато, по сравнению с $\beta_2^{\overline{\text{MS}}}$ (A.3), он включает в себя слагаемые с дзета-функцией ζ_3 .

1.6.1. Функция Адлера e^+e^- аннигиляции и R -отношение в mMOM-схеме

Используя формулы из предыдущего раздела, мы можем исследовать поведение функции Адлера и $R(s)$ -отношения для процесса $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow hadrons$ в mMOM-схеме. Учитывая результаты четырёхпетлевых вычислений для несинглетного вклада $D^{NS}(a_s)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [46], представленные в (1.6-1.8), разложение константы связи $a_s^{\overline{\text{MS}}}$ по степеням a_s^{mMOM} (1.108), а также пользуясь ренорминвариантностью функции $D^{NS}(a_s(Q^2))$, получаем [27]:

$$D_{\text{mMOM}}^{NS} = 1 + \sum_{k=1}^4 d_{k,\text{mMOM}}^{NS} (a_s^{\text{mMOM}})^k, \quad (1.119)$$

$$d_{1,\text{mMOM}}^{NS} = \frac{3}{4} C_F, \quad (1.120)$$

$$d_{2,\text{mMOM}}^{NS} = \left[\frac{569}{192} - \frac{11}{4} \zeta_3 - \frac{3}{32} \xi - \frac{3}{64} \xi^2 \right] C_F C_A - \frac{3}{32} C_F^2 - \left[\frac{23}{24} - \zeta_3 \right] C_F T_F n_f, \quad (1.121)$$

$$d_{3,\text{mMOM}}^{NS} = -\frac{69}{128} C_F^3 + \left[-\frac{1355}{768} - \frac{143}{16} \zeta_3 + \frac{55}{4} \zeta_5 + \frac{3}{128} \xi + \frac{3}{256} \xi^2 \right] C_F^2 C_A \quad (1.122)$$

$$+ \left[-\frac{2033}{192} + \frac{89}{12} \zeta_3 + \frac{5}{6} \zeta_5 + \left(\frac{23}{96} - \frac{\zeta_3}{4} \right) \xi + \left(\frac{23}{192} - \frac{\zeta_3}{8} \right) \xi^2 \right] C_F C_A T_F n_f$$

$$+ \left[\frac{29}{96} + 4\zeta_3 - 5\zeta_5 \right] C_F^2 T_F n_f + \left[\frac{3}{2} - \zeta_3 \right] C_F T_F^2 n_f^2 + \left[\frac{50575}{3072} - \frac{18929}{1536} \zeta_3 \right.$$

$$\left. - \frac{55}{24} \zeta_5 - \left(\frac{2063}{3072} - \frac{143}{256} \zeta_3 \right) \xi - \left(\frac{1273}{3072} - \frac{185}{512} \zeta_3 \right) \xi^2 - \frac{9}{1024} \xi^3 \right] C_F C_A^2,$$

$$d_{4,\text{mMOM}}^{NS} = \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{d_R} \left[\frac{3}{16} - \frac{\zeta_3}{4} - \frac{5}{4} \zeta_5 \right] + n_f \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{d_R} \left[-\frac{13}{16} - \zeta_3 + \frac{5}{2} \zeta_5 \right] \quad (1.123)$$

$$+ \left[-\frac{12305}{2048} - \frac{139}{128} \zeta_3 + \frac{2255}{32} \zeta_5 - \frac{1155}{16} \zeta_7 + \frac{207}{1024} \xi + \frac{207}{2048} \xi^2 \right] C_F^3 C_A$$

$$+ \left[-\frac{1850345}{73728} - \frac{509815}{6144} \zeta_3 + \frac{5575}{64} \zeta_5 + \frac{1155}{32} \zeta_7 + \left(\frac{2639}{4096} + \frac{3465}{1024} \zeta_3 - \frac{165}{32} \zeta_5 \right) \xi \right.$$

$$\left. + \left(\frac{697}{2048} + \frac{3423}{2048} \zeta_3 - \frac{165}{64} \zeta_5 \right) \xi^2 + \frac{3}{4096} \xi^3 - \frac{3}{8192} \xi^4 \right] C_F^2 C_A^2 + \left[\frac{4157}{2048} + \frac{3}{8} \zeta_3 \right] C_F^4$$

$$+ \left[\frac{5674729}{49152} - \frac{1504181}{24576} \zeta_3 - \frac{2907785}{49152} \zeta_5 - \frac{385}{64} \zeta_7 + \frac{4411}{256} \zeta_3^2 + \left(-\frac{828805}{147456} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{15845}{6144} \zeta_3 + \frac{4405}{4096} \zeta_5 + \frac{121}{128} \zeta_3^2 \right) \xi - \left(\frac{171455}{49152} - \frac{5667}{2048} \zeta_3 - \frac{3695}{8192} \zeta_5 + \frac{33}{256} \zeta_3^2 \right) \xi^2$$

$$\left. - \left(\frac{835}{12288} - \frac{103}{2048} \zeta_3 - \frac{5}{4096} \zeta_5 \right) \xi^3 + \left(\frac{503}{49152} - \frac{93}{8192} \zeta_3 - \frac{35}{16384} \zeta_5 \right) \xi^4 \right] C_F C_A^3$$

$$+ \left[\frac{287}{256} + \frac{17}{8} \zeta_3 - \frac{235}{8} \zeta_5 + \frac{105}{4} \zeta_7 \right] C_F^3 T_F n_f + \left[-\frac{67}{24} + \frac{7}{6} \zeta_3 + \frac{5}{3} \zeta_5 \right] C_F T_F^3 n_f^3$$

$$+ \left[\frac{48451}{4608} + \frac{2109}{32} \zeta_3 - \frac{1085}{16} \zeta_5 - \frac{105}{8} \zeta_7 - \frac{11}{4} \zeta_3^2 + \left(-\frac{29}{256} - \frac{3}{2} \zeta_3 + \frac{15}{8} \zeta_5 \right) \xi \right.$$

$$\left. - \left(\frac{29}{512} + \frac{3}{4} \zeta_3 - \frac{15}{16} \zeta_5 \right) \xi^2 \right] C_F^2 C_A T_F n_f + \left[-\frac{2027833}{18432} + \frac{12977}{256} \zeta_3 + \frac{695}{12} \zeta_5 \right.$$

$$\left. + \frac{35}{16} \zeta_7 - \frac{489}{64} \zeta_3^2 + \left(\frac{68479}{18432} - \frac{493}{256} \zeta_3 - \frac{5}{16} \zeta_5 - \frac{11}{32} \zeta_3^2 \right) \xi + \left(\frac{6409}{3072} - \frac{197}{128} \zeta_3 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5}{32}\zeta_5 + \frac{3}{64}\zeta_3^2 \Big) \xi^2 + \left(\frac{23}{3072} - \frac{\zeta_3}{128} \right) \xi^3 - \left(\frac{23}{6144} - \frac{\zeta_3}{256} \right) \xi^4 \Big] C_F C_A^2 T_F n_f \\
& + \left[\frac{73339}{2304} - \frac{429}{32}\zeta_3 - \frac{35}{2}\zeta_5 + \frac{\zeta_3^2}{2} + \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{24}\zeta_3 \right) \xi \right. \\
& \left. + \left(-\frac{9}{32} + \frac{3}{16}\zeta_3 \right) \xi^2 \right] C_F C_A T_F^2 n_f^2 + \left[-\frac{125}{384} - \frac{281}{24}\zeta_3 + \frac{25}{2}\zeta_5 + \zeta_3^2 \right] C_F^2 T_F^2 n_f^2.
\end{aligned}$$

Из представленных формул следует, что аналитическое выражение для функции Адлера в mMOM-схеме в четырёхпетлевом приближении содержит такие же трансцендентные базисные константы, как и в случае $\overline{\text{MS}}$ -схемы (см. (1.8)). В самом деле, при вычислениях в этих схемах появляются лишь пропорциональные ζ_3 , ζ_5 , ζ_3^2 и ζ_7 специальные функции. Также стоит сравнить выражения (1.121-1.123) с их гораздо более сложными по структуре V-схемными аналогами (1.83-1.85), где помимо дополнительных комбинаций веса 6 с трансцендентными константами типа π^2 , $\ln 2$, $\text{Li}_4(1/2)$, s_6 , также содержатся две новые цветовые структуры $C_F d_F^{abcd} d_A^{abcd}/N_A$ и $C_F d_F^{abcd} d_F^{abcd} n_f/N_A$. Данные замечания будут важны для исследований, проведённых во 2-ой главе. Более детальный анализ сравнения поведения рядов ТВ для функции Адлера в различных схемах перенормировок будет выполнен ниже.

В частном случае калибровки Ландау $\xi = 0$ и $n_f = 3$ численные выражения для коэффициентов (1.121-1.123) были получены ранее в работе [136]. Представленные там значения находятся в полном согласии с более общими результатами наших вычислений (1.121-1.123), приведёнными в [27].

Синглетные вклады в функцию Адлера в mMOM-схеме будут иметь следующий вид:

$$d_{3,\text{mMOM}}^{SI} = d_3^{SI}, \quad (1.124)$$

$$\begin{aligned}
d_{4,\text{mMOM}}^{SI} &= d_4^{SI} + 3b_1^{\text{mMOM}} d_3^{SI} = \left[\left(-\frac{13}{64} - \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{8}\zeta_5 \right) C_F \right. \\
&+ \left(\frac{5927}{9216} - \frac{169}{192}\zeta_3 - \frac{11}{32}\zeta_3^2 + \frac{45}{64}\zeta_5 - \left(\frac{11}{512} - \frac{3}{64}\zeta_3 \right) \xi - \left(\frac{11}{1024} - \frac{3}{128}\zeta_3 \right) \xi^2 \right) C_A \\
&\left. + \left(-\frac{47}{288} + \frac{19}{96}\zeta_3 - \frac{5}{16}\zeta_5 + \frac{\zeta_3^2}{8} \right) T_F n_f \right] \frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R}.
\end{aligned} \quad (1.125)$$

Коэффициенты $R(s)$ -отношения в mMOM-схеме в четырёхпетлевом приближении также проще всего вычислить исходя из ренорминвариантности данной функции: полный ряд ТВ для наблюдаемой физической величины не зависит от схемы, в которой она была посчитана. Помимо mMOM-схемы в качестве второй схемы перенормировки будем рассматривать $\overline{\text{MS}}$ как наиболее удобную. Для $R^{\overline{\text{MS}}}$ и $D^{\overline{\text{MS}}}$ мы знаем соотношения (1.18), которые их связывают в N³LO порядке. Кроме того, функция Адлера $D(a_s(Q^2))$ также является ренорминвариантной величиной, вид которой мы уже получили на четырёхпетлевом уровне в mMOM-схеме. Таким образом, мы знаем соотношения между коэффициентами r_k^{mMOM} и $r_k^{\overline{\text{MS}}}$, $r_k^{\overline{\text{MS}}}$ и $d_k^{\overline{\text{MS}}}$, а также

между $\overline{d}_k^{\overline{\text{MS}}}$ и d_k^{mMOM} . Отсюда получаем следующие выражения, связывающие коэффициенты $D(Q^2)$ -функции и $R(s)$ -отношения в mMOM-схеме:

$$r_{1,\text{mMOM}}^{NS} = d_{1,\text{mMOM}}^{NS}, \quad r_{2,\text{mMOM}}^{NS} = d_{2,\text{mMOM}}^{NS}, \quad (1.126)$$

$$r_{3,\text{mMOM}}^{NS} = d_{3,\text{mMOM}}^{NS} - \frac{\pi^2}{3} d_1 \beta_0^2, \quad (1.127)$$

$$r_{4,\text{mMOM}}^{NS} = d_{4,\text{mMOM}}^{NS} - \pi^2 \left[d_{2,\text{mMOM}}^{NS} \beta_0^2 + \frac{5}{6} d_1 \beta_0 \left(\beta_1^{\text{mMOM}} + \xi \gamma_0 \frac{\partial b_1^{\text{mMOM}}}{\partial \xi} \right) \right], \quad (1.128)$$

$$r_{3,\text{mMOM}}^{SI} = d_{3,\text{mMOM}}^{SI}, \quad r_{4,\text{mMOM}}^{SI} = d_{4,\text{mMOM}}^{SI}. \quad (1.129)$$

Соотношения (1.126), (1.127) и (1.129) по форме полностью идентичны соответствующим формулам в (1.18). По сравнению с $\overline{\text{MS}}$ -схемным соотношением для r_4^{NS} и d_4^{NS} , равенство (1.128) содержит дополнительный вклад $\xi \gamma_0 \partial b_1^{\text{mMOM}} / \partial \xi$, связанный с явной зависимостью β^{mMOM} -функции от калибровки. Здесь $\gamma_0 = (-13/24 + \xi/8) C_A + T_F n_f / 3$ — первый схемно-независимый коэффициент аномальной размерности глюонного поля. Формула (1.128) совпадает по форме со своим $\overline{\text{MS}}$ -схемным аналогом только тогда, когда $\xi \partial b_1^{\text{mMOM}} / \partial \xi = 0$, т.е. при $\xi = 0, -1$ (b_1^{mMOM} определяется в (1.109)).

В заключение данного раздела отметим, что поведение R -отношения с изменением энергии и его схемная зависимость также изучались в mMOM и отличных от неё схемах в калибровке Ландау $\xi = 0$ в работах [25, 134].

1.6.2. Коэффициентная функция Бьёркена в mMOM-схеме

Действуя полностью аналогичным предыдущему разделу образом, находим аналитическое четырёхпетлевое выражение для несинглетного вклада в функцию Бьёркена глубоко-неупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в mMOM-схеме в случае калибровочной группы $SU(N_c)$:

$$C_{Bjp, \text{mMOM}}^{NS} = 1 + \sum_{k=1}^4 c_{k,\text{mMOM}}^{NS} (a_s^{\text{mMOM}})^k, \quad (1.130)$$

$$c_{1,\text{mMOM}}^{NS} = -\frac{3}{4} C_F, \quad (1.131)$$

$$c_{2,\text{mMOM}}^{NS} = \frac{21}{32} C_F^2 + \left(-\frac{107}{192} + \frac{3}{32} \xi + \frac{3}{64} \xi^2 \right) C_F C_A + \frac{1}{12} C_F T_F n_f, \quad (1.132)$$

$$\begin{aligned} c_{3,\text{mMOM}}^{NS} = & -\frac{3}{128} C_F^3 + \left[\frac{1415}{2304} - \frac{11}{12} \zeta_3 - \frac{21}{128} \xi - \frac{21}{256} \xi^2 \right] C_F^2 C_A + \left[-\frac{13}{36} + \frac{\zeta_3}{3} \right] C_F^2 T_F n_f \\ & + \left[\frac{13}{9} + \frac{3}{8} \zeta_3 - \frac{5}{6} \zeta_5 - \frac{1}{48} \xi - \frac{1}{96} \xi^2 \right] C_F C_A T_F n_f + \left[-\frac{20585}{9216} - \frac{117}{512} \zeta_3 + \frac{55}{24} \zeta_5 \right. \\ & \left. + \left(\frac{215}{3072} + \frac{33}{256} \zeta_3 \right) \xi + \left(\frac{349}{3072} - \frac{9}{512} \zeta_3 \right) \xi^2 + \frac{9}{1024} \xi^3 \right] C_F C_A^2 - \frac{5}{24} C_F T_F^2 n_f^2, \end{aligned} \quad (1.133)$$

$$\begin{aligned}
C_{4,\text{mMOM}}^{NS} = & \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_c} \left[-\frac{3}{16} + \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{4}\zeta_5 \right] + n_f \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_c} \left[\frac{13}{16} + \zeta_3 - \frac{5}{2}\zeta_5 \right] \\
& + \left[-\frac{4823}{2048} - \frac{3}{8}\zeta_3 \right] C_F^4 + \left[-\frac{13307}{18432} - \frac{971}{96}\zeta_3 + \frac{1045}{48}\zeta_5 + \frac{9}{1024}\xi + \frac{9}{2048}\xi^2 \right] C_F^3 C_A \\
& + \left[\frac{2543485}{221184} + \frac{90169}{6144}\zeta_3 - \frac{1375}{144}\zeta_5 - \frac{385}{16}\zeta_7 + \left(-\frac{1339}{12288} + \frac{121}{1024}\zeta_3 \right) \xi \right. \\
& + \left. \left(-\frac{1117}{6144} + \frac{415}{2048}\zeta_3 \right) \xi^2 - \frac{21}{4096}\xi^3 + \frac{21}{8192}\xi^4 \right] C_F^2 C_A^2 + \left[-\frac{3927799}{442368} + \frac{49763}{73728}\zeta_3 \right. \\
& + \frac{345755}{147456}\zeta_5 + \frac{385}{64}\zeta_7 - \frac{121}{96}\zeta_3^2 + \left(\frac{107569}{147456} + \frac{1623}{2048}\zeta_3 - \frac{4405}{4096}\zeta_5 \right) \xi \\
& + \left. \left(\frac{28303}{49152} - \frac{11}{512}\zeta_3 - \frac{3695}{8192}\zeta_5 \right) \xi^2 + \left(\frac{151}{3072} - \frac{59}{2048}\zeta_3 - \frac{5}{4096}\zeta_5 \right) \xi^3 \right. \\
& + \left. \left(-\frac{41}{49152} + \frac{5}{8192}\zeta_3 + \frac{35}{16384}\zeta_5 \right) \xi^4 \right] C_F C_A^3 + \left[\frac{317}{144} + \frac{109}{24}\zeta_3 - \frac{95}{12}\zeta_5 \right] C_F^3 T_F n_f \\
& + \left[-\frac{6229}{864} - \frac{1739}{288}\zeta_3 + \frac{205}{72}\zeta_5 + \frac{35}{4}\zeta_7 + \left(\frac{13}{96} - \frac{\zeta_3}{8} \right) \xi + \left(\frac{13}{192} - \frac{\zeta_3}{16} \right) \xi^2 \right] C_F^2 C_A T_F n_f \\
& + \left[\frac{12265}{1728} - \frac{1237}{512}\zeta_3 + \frac{15}{16}\zeta_5 - \frac{35}{16}\zeta_7 + \frac{11}{12}\zeta_3^2 + \left(-\frac{8257}{18432} - \frac{49}{96}\zeta_3 + \frac{5}{16}\zeta_5 \right) \xi \right. \\
& + \left. \left(-\frac{869}{3072} - \frac{33}{512}\zeta_3 + \frac{5}{32}\zeta_5 \right) \xi^2 - \frac{1}{1536}\xi^3 + \frac{1}{3072}\xi^4 \right] C_F C_A^2 T_F n_f \\
& + \left[-\frac{1283}{864} + \frac{85}{72}\zeta_3 - \frac{35}{36}\zeta_5 - \frac{\zeta_3^2}{6} + \left(\frac{11}{192} + \frac{\zeta_3}{12} \right) \xi + \frac{5}{128}\xi^2 \right] C_F C_A T_F^2 n_f^2 \\
& + \left[\frac{1891}{3456} - \frac{\zeta_3}{36} \right] C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \frac{5}{72} C_F T_F^3 n_f^3.
\end{aligned} \tag{1.134}$$

Что касается синглетного вклада $C_{B_{jp}, \text{mMOM}}^{SI}$, который впервые появляется в четвёртом порядке ТВ [84], то он, как и в случае калибровочно-инвариантной V-схемы, тождественно равен $\overline{\text{MS}}$ -схемному выражению [85].

1.7. Поведение рядов теории возмущений для $D(Q^2)$, $R(s)$ и $C_{B_{jp}}(Q^2)$ функций в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схемах

Перейдём к сравнению поведения рядов теории возмущений для рассматриваемых физических величин в калибровочно-инвариантных $\overline{\text{MS}}$ и V-схемах, а также в калибровочно-зависимой mMOM-схеме. В Главе 2 мы выясним, что калибровки $\xi = 0, -1, -3$ в mMOM-схеме нас будут интересовать особенно. Поэтому представим численные результаты именно для этих калибровок.

Интерес к исследованию поведения физических величин в высоких порядках ТВ связан как с возможностями современных прецизионных измерений на ускорительных комплексах, так и с значительным прогрессом в расчётах многопетлевых диаграмм. Последние зачастую приводят к асимптотическим рядам, факториальный рост которых предсказывается в рам-

ках гипотезы о ренормальной доминантности [149–151]. Подробнее этот вопрос будет обсуждаться в Главе 3. Здесь мы лишь отметим, что в связи с этим важно с теоретической точки зрения фиксировать порядок ТВ, начиная с которого поправки начнут увеличиваться.

1.7.1. Случай функции Адлера e^+e^- аннигиляции в адроны

Учитывая результаты, приведённые в разделах (1.1), (1.5.2) и (1.6.1), получаем численные выражения для функции Адлера в реалистичном случае цветовой группы $SU(3)$ для физически интересных значений $n_f = 4, 5$, приведённые в Таблице 1.1.

Схема	n_f	Функция Адлера
$\overline{\text{MS}}$	4	$1 + a_s + 1.53a_s^2 + 2.759a_s^3 + 27.3888a_s^4 - \delta_f(0.413a_s^3 + 5.1757a_s^4)$
	5	$1 + a_s + 1.41a_s^2 - 0.681a_s^3 + 9.2102a_s^4 - \delta_f(0.413a_s^3 + 4.9841a_s^4)$
V	4	$1 + a_{s,V} + 0.05a_{s,V}^2 - 10.588a_{s,V}^3 + 23.270a_{s,V}^4 - \delta_f(0.413a_{s,V}^3 + 3.3509a_{s,V}^4)$
	5	$1 + a_{s,V} + 0.22a_{s,V}^2 - 10.935a_{s,V}^3 + 21.069a_{s,V}^4 - \delta_f(0.413a_{s,V}^3 + 3.5035a_{s,V}^4)$
mMOM $\xi = 0$	4	$1 + a_{s,M} - 0.89a_{s,M}^2 - 5.813a_{s,M}^3 + 11.7185a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.1888a_{s,M}^4)$
	5	$1 + a_{s,M} - 0.72a_{s,M}^2 - 6.604a_{s,M}^3 + 18.2579a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.3415a_{s,M}^4)$
mMOM $\xi = -1$	4	$1 + a_{s,M} - 0.69a_{s,M}^2 - 5.286a_{s,M}^3 + 13.2819a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.4212a_{s,M}^4)$
	5	$1 + a_{s,M} - 0.54a_{s,M}^2 - 6.016a_{s,M}^3 + 18.3922a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.5739a_{s,M}^4)$
mMOM $\xi = -3$	4	$1 + a_{s,M} - 1.45a_{s,M}^2 - 1.352a_{s,M}^3 + 23.1028a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 1.4915a_{s,M}^4)$
	5	$1 + a_{s,M} - 1.29a_{s,M}^2 - 2.325a_{s,M}^3 + 28.3905a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 1.6442a_{s,M}^4)$

Таблица 1.1: Поведение рядов ТВ для функции Адлера в КХД на четырёхпетлевом уровне в разных схемах перенормировок при $n_f = 4, 5$. Общий множитель $3 \sum_f Q_f^2$ опущен. Вклад $\delta_f = (\sum_f Q_f)^2 / \sum_f Q_f^2$ синглетных поправок выделен отдельно и равен $\delta_f = 2/5$ для $n_f = 4$ и $\delta_f = 1/11$ для $n_f = 5$.

Рассмотрим вначале несинглетные вклады в $D(a_s(Q^2))$. Из Таблицы 1.1 видно, что свойство знакопостоянного роста коэффициентов функции D^{NS} проявляется лишь в одном единственном случае, соответствующем рождению c -кварков в процессе электрон–позитронной аннигиляции в $\overline{\text{MS}}$ -схеме при $n_f = 4$. В остальных случаях не прослеживается какой-либо чёткой знакопостоянной или знакопеременной ($c +$ на $-$ и наоборот) структуры рядов ТВ для NS вклада в функцию Адлера в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении. Это может свидетельствовать о том, что в рассматриваемом порядке точности вклады ИК ренормалонов, которые приводят к знакопостоянному факториальному росту коэффициентов рядов ТВ, всё ещё не проявляются в должной мере и конкурируют с противоположными вкладами УФ ренормалонов, предска-

вающих знакопеременное поведение коэффициентов в MS-подобных схемах [149–151]. При суммировании асимптотических рядов ТВ по Борелю их расходимость “переходит” в полюса на плоскости борелевской переменной u . Полюса, расположенные на положительной вещественной полуоси, называются инфракрасными, а на отрицательной — ультрафиолетовыми. Как показано в работах [149, 150] в лидирующем по степеням β_0 приближении (в литературе принято кратко называть *large- β_0* приближением) в $\overline{\text{MS}}$ -схеме ряд ТВ для функции Адлера обладает ренормалонными полюсами как ИК типа (полюс первого порядка $u = 2$), так и УФ типа (полюс первого и второго порядков $u = -1$). Частичное сокращение поправок обоих типов приводит к неопределённому поведению знаков у коэффициентов функции Адлера по крайней мере на рассматриваемом четырёхпетлевом уровне (см. Таблицу 1.1). Однако, тенденция к росту коэффициентов с увеличением порядка ТВ наблюдается уже на трёхпетлевом уровне (кроме случая $\overline{\text{MS}}$ -схемы при $n_f = 5$ и mMOM-схемы при $n_f = 4$), но наиболее чётко проявляется в N^3LO приближении.

Результаты Таблицы 1.1 демонстрируют, что наименьшие значения двухпетлевых коэффициентов возникают при вычислении в V-схеме, трёхпетлевых — в $\overline{\text{MS}}$ и mMOM-схеме с $\xi = -3$, четырёхпетлевых — в mMOM-схеме в калибровке Ландау для $n_f = 4$ и $\overline{\text{MS}}$ -схеме для $n_f = 5$. Поэтому, с точки зрения исследования скорости сходимости рядов ТВ для функции Адлера в рассматриваемых схемах в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении однозначные выводы о предпочтительности той или иной схемы перенормировок могут быть сделаны лишь при построении графиков данной функции. Отрицательные по величине синглетные вклады в $D(a_s(Q^2))$ -функцию значительно меньше несинглетных и существенно не влияют на поведение функции Адлера.

1.7.2. Случай R -отношения

Численные значения коэффициентов $R(s)$ -отношения в случае $SU(3)$ -группы в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схемах могут быть получены из приведённых в разделах (1.2), (1.5.2), (1.6.1) аналитических выражений для $SU(N_c)$ -группы и представлены в Таблице 1.2.

Сравнение результатов Таблицы 1.1 с 1.2 указывает на то, что влияние эффектов аналитического продолжения из евклидовой области энергий в минковскую действительно оказывает решающую роль в поведении $R(s)$ -отношения. Во всех схемах перенормировок коэффициенты третьего порядка отрицательны и значительно больше по модулю, чем аналогичные поправки к функции Адлера. По сравнению с $D(a_s(Q^2))$ -функцией поведение четырёхпетлевых коэффициентов R -отношения носит существенно более нерегулярный характер. В самом

Схема	n_f	$R(s)$ -отношение
$\overline{\text{MS}}$	4	$1 + a_s + 1.53a_s^2 - 11.520a_s^3 - 93.1255a_s^4 - \delta_f(0.413a_s^3 + 5.1757a_s^4)$
	5	$1 + a_s + 1.41a_s^2 - 12.767a_s^3 - 80.0085a_s^4 - \delta_f(0.413a_s^3 + 4.9841a_s^4)$
V	4	$1 + a_{s,V} + 0.05a_{s,V}^2 - 24.867a_{s,V}^3 - 33.8458a_{s,V}^4 - \delta_f(0.413a_{s,V}^3 + 3.3509a_{s,V}^4)$
	5	$1 + a_{s,V} + 0.22a_{s,V}^2 - 23.021a_{s,V}^3 - 25.0038a_{s,V}^4 - \delta_f(0.413a_{s,V}^3 + 3.5035a_{s,V}^4)$
mMOM	4	$1 + a_{s,M} - 0.89a_{s,M}^2 - 20.092a_{s,M}^3 - 5.1307a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.1888a_{s,M}^4)$
$\xi = 0$	5	$1 + a_{s,M} - 0.72a_{s,M}^2 - 18.690a_{s,M}^3 + 6.2668a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.3415a_{s,M}^4)$
mMOM	4	$1 + a_{s,M} - 0.69a_{s,M}^2 - 19.565a_{s,M}^3 - 12.1346a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.4212a_{s,M}^4)$
$\xi = -1$	5	$1 + a_{s,M} - 0.54a_{s,M}^2 - 18.102a_{s,M}^3 - 0.1252a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.5739a_{s,M}^4)$
mMOM	4	$1 + a_{s,M} - 1.45a_{s,M}^2 - 15.631a_{s,M}^3 + 30.2423a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 1.4915a_{s,M}^4)$
$\xi = -3$	5	$1 + a_{s,M} - 1.29a_{s,M}^2 - 14.411a_{s,M}^3 + 37.0659a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 1.6442a_{s,M}^4)$

Таблица 1.2: Поведение рядов ТВ для $R(S)$ -отношения в КХД на четырёхпетлевом уровне в разных схемах перенормировок при $n_f = 4, 5$. Общий множитель $3\sum_f Q_f^2$ опущен. Вклад $\delta_f = (\sum_f Q_f)^2 / \sum_f Q_f^2$ синглетных поправок выделен отдельно и равен $\delta_f = 2/5$ для $n_f = 4$ и $\delta_f = 1/11$ для $n_f = 5$.

деле, в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схеме в калибровке $\xi = -1$ они отрицательны, в mMOM с $\xi = -3$ они положительны, а в калибровке Ландау меняют знак с минуса на плюс при переходе от $n_f = 4$ к $n_f = 5$. При этом, сравнение $\mathcal{O}(a_s^3)$ и $\mathcal{O}(a_s^4)$ коэффициентов в V, а также mMOM-схеме с $\xi = 0, -1$ указывает на отсутствие хоть какого бы то ни было факториального роста этих членов в данных схемах. О существенном увеличении четырёхпетлевых коэффициентов по отношению к трёхпетлевым можно с уверенностью говорить только в двух случаях, в $\overline{\text{MS}}$ и mMOM-схеме в калибровке $\xi = -3$.

1.7.3. Случай функции Бьёркена

Используя представленные в разделах (1.3), (1.5.3), (1.6.2) четырёхпетлевые аналитические выражения для функции Бьёркена в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схемах, получаем её численные значения для случая $SU(3)$ калибровочной группы, приведённые в Таблице 1.3.

Несмотря на то, что в large- β_0 приближении борелевский образ функции Бьёркена содержит как ИК $u = 1, 2$, так и УФ полюса $u = -1, -2$ [152], в $\overline{\text{MS}}$ -схеме коэффициенты этой функции при $n_f = 4, 5$ являются знакопостоянными. Кроме того, в этой схеме явно прослеживается тенденция к факториальному росту коэффициентов ряда ТВ. Этого, однако, нельзя с уверенностью сказать ни об одной из остальных схем. Действительно, в V и mMOM-схеме

Схема	n_f	Функция Бьёркена
$\overline{\text{MS}}$	4	$1 - a_s - 3.25a_s^2 - 13.850a_s^3 - 102.4020a_s^4 + 9.2593\nu_f a_s^4$
	5	$1 - a_s - 2.92a_s^2 - 7.840a_s^3 - 41.9598a_s^4 + 8.5185\nu_f a_s^4$
V	4	$1 - a_{s,V} - 1.78a_{s,V}^2 + 4.577a_{s,V}^3 - 22.466a_{s,V}^4 + 9.2593\nu_f a_{s,V}^4$
	5	$1 - a_{s,V} - 1.72a_{s,V}^2 + 6.014a_{s,V}^3 - 4.671a_{s,V}^4 + 8.5185\nu_f a_{s,V}^4$
mMOM	4	$1 - a_{s,M} - 0.84a_{s,M}^2 + 3.038a_{s,M}^3 - 12.3419a_{s,M}^4 + 9.2593\nu_f a_{s,M}^4$
$\xi = 0$	5	$1 - a_{s,M} - 0.79a_{s,M}^2 + 4.510a_{s,M}^3 - 3.6166a_{s,M}^4 + 8.5185\nu_f a_{s,M}^4$
mMOM	4	$1 - a_{s,M} - 1.03a_{s,M}^2 + 1.863a_{s,M}^3 - 18.4919a_{s,M}^4 + 9.2593\nu_f a_{s,M}^4$
$\xi = -1$	5	$1 - a_{s,M} - 0.97a_{s,M}^2 + 3.357a_{s,M}^3 - 7.5718a_{s,M}^4 + 8.5185\nu_f a_{s,M}^4$
mMOM	4	$1 - a_{s,M} - 0.28a_{s,M}^2 + 0.517a_{s,M}^3 - 31.5482a_{s,M}^4 + 9.2593\nu_f a_{s,M}^4$
$\xi = -3$	5	$1 - a_{s,M} - 0.22a_{s,M}^2 + 1.927a_{s,M}^3 - 21.1415a_{s,M}^4 + 8.5185\nu_f a_{s,M}^4$

Таблица 1.3: Поведение рядов ТВ для функции Бьёркена в КХД на четырёхпетлевом уровне в разных схемах перенормировок при $n_f = 4, 5$. Вклад синглетных поправок $\nu_f = \sum_f Q_f$ выделен отдельно и равен $\nu_f = 2/3$ для $n_f = 4$ и $\nu_f = 1/3$ для $n_f = 5$.

коэффициенты растут более медленно с увеличением порядка ТВ и их абсолютные значения существенно меньше, чем в $\overline{\text{MS}}$ -схеме. К тому же, начиная с трёхпетлевого уровня они носят знакопеременный характер.

1.7.4. Поведение функции $R(s)$ в рассматриваемых схемах

Для большей наглядности исследуем поведение непосредственно измеряемой в экспериментах характеристики e^+e^- аннигиляции в адроны — $R(s)$ -отношения, изучаемого нами в различных схемах перенормировок, в зависимости от полной энергии налетающих частиц. Следуя изложению данного раздела и учитывая результаты предыдущих, без особого труда также может быть исследовано поведение функций Адлера и Бьёркена. Здесь же мы остановимся лишь на этой физической величине и изучим её поведение в области энергий выше порога рождения боттомония до начала проявления левого плеча широкого пика Z^0 -бозона, выше которого вдобавок к рассматриваемому нами однофотонному приближению необходимо учитывать влияние электрослабого процесса $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \text{адроны}$. В рассматриваемой области энергий вклад в сечение аннигиляции дают $n_f = 5$ активных ароматов кварков.

Для анализа поведения $R(s)$ отношения в NLO и NNLO приближениях мы используем нормировку константы связи сильного взаимодействия в $\overline{\text{MS}}$ -схеме на массе Z^0 -бозона

(см. раздел 1.4 и комментарии к Рис. 1.4). В $N^3\text{LO}$ приближении мы берём среднее мировое значение $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1181 \pm 0.0011$ при $M_Z \approx 91.1876$ ГэВ из PDG(18) [153]. Отсюда, разложение α_s по обратным степеням логарифмов на четырёхпетлевом уровне [154] даёт $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, N^3\text{LO}}^{(n_f=5)} \approx 210$ МэВ. Следуя методу эффективных зарядов [112–114] (см. раздел 1.5.1) в V и $m\text{MOM}$ -схеме масштабы $\Lambda_V^{(n_f)}$ и $\Lambda_{m\text{MOM}}^{(n_f)}$ должны быть выбраны следующим образом: $\Lambda_V^{(n_f)} = \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_f)} \exp(a_1/2\beta_0)$, $\Lambda_{m\text{MOM}}^{(n_f)} = \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_f)} \exp((r_2 - r_2^{\text{mMOM}})/2\beta_0)$, где a_1 и r_2 — одно и двухпетлевые $\overline{\text{MS}}$ поправки к потенциалу и функции $R(s)$ соответственно.

Исследование поведения $R(s)$ -отношения в зависимости от энергии в $\overline{\text{MS}}$ и V -схеме в принципе идентично. В самом деле, используя выражения для $R(s)$ из параграфов 1.2 и 1.5.2, разложение $\alpha_s(s)$ по степеням $\ln(s/\Lambda^2)$, значения коэффициентов β -функций в этих двух калибровочно-инвариантных схемах (см. А и 1.5.1) и представленное выше соотношение между $\Lambda_V^{(n_f)}$ и $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_f)}$, мы без особого труда получаем кривые, описывающие зависимость $R(s)$ от переменной Манделъштама s (см. Рис. 1.5).

В случае $m\text{MOM}$ -схемы ситуация несколько более сложная. Действительно, как мы уже говорили β^{mMOM} -функция зависит от калибровки, начиная с двухпетлевого уровня (1.116–1.117). Поэтому, для изучения эффекта бега константы связи мы должны совместно решать систему двух нелинейных РГ дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial \ln \mu^2} = \beta^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}), \\ \frac{\partial \ln \xi^{\text{mMOM}}}{\partial \ln \mu^2} = \gamma_\xi^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}). \end{cases} \quad (1.135)$$

Соответствующие выражения четырёхпетлевых коэффициентов β -функции и аномальной размерности калибровки (глюонного поля) в $m\text{MOM}$ -схеме могут быть найдены в [138, 148]. Начальное условие для α_s^{mMOM} при $\mu^2 = M_Z^2$ может быть непосредственно получено из соотношения (1.108) и фиксированного значения $\alpha_s(M_Z^2)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме. Однако, при этом мы должны также фиксировать калибровочное значение $\xi^{\text{mMOM}}(M_Z^2)$. По нашей договорённости мы будем рассматривать только $\xi^{\text{mMOM}} = 0, -1, -3$ при $\mu^2 = M_Z^2$ ⁴.

Решение системы дифференциальных уравнений (1.135) с фиксированными начальными данными $\alpha_s^{\text{mMOM}}(M_Z^2)$ и $\xi^{\text{mMOM}}(M_Z^2)$ для трёх значений калибровки было получено при

⁴ Помимо схемной зависимости, данное обстоятельство вносит дополнительную неопределённость при изучении поведения физических величин в калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок. В самом деле, мы могли бы фиксировать значения $\xi^{\text{mMOM}} = 0, -1, -3$ на любом удобном для измерения масштабе, например на $\mu^2 = M_\tau^2$. При этом новая зависимость физической величины от энергии будет несколько отличаться от старой при $\mu^2 = M_Z^2$ (исключением является калибровка Ландау, в которой калибровочный параметр ξ не зависит от масштаба).

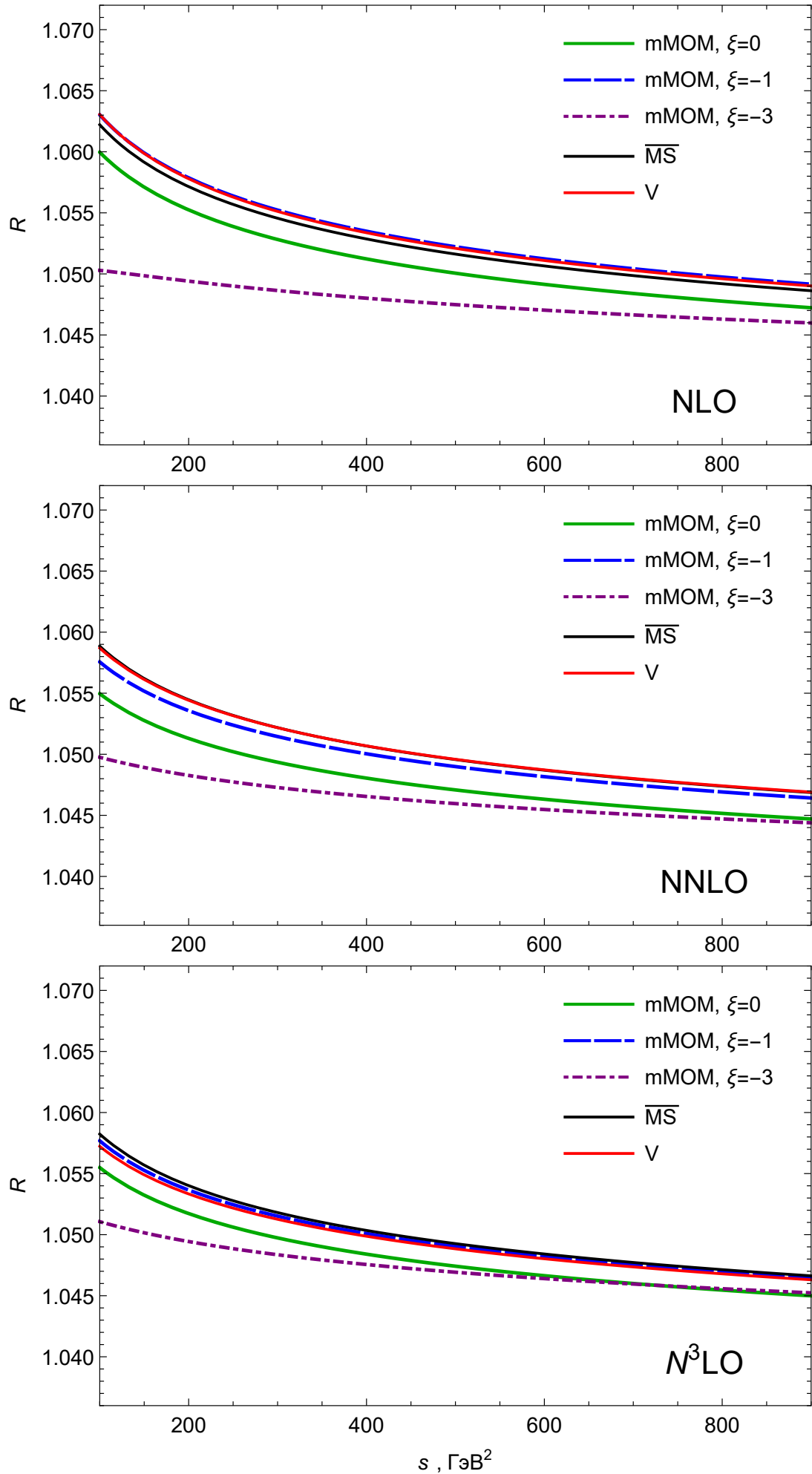


Рис. 1.5: Поведение $R(s)$ ($3\sum_f Q_f^2$ опущен) в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схеме в NLO, NNLO и $N^3\text{LO}$ приближении.

помощи программы, написанной в системе компьютерной алгебры *Mathematica*, и позволило определить зависимость R -отношения от s в NLO, NNLO и N³LO приближении в mMOM-схеме.

Поведение $R(s)$ -отношения в рассматриваемых трёх схемах представлено на Рис. 1.5. Из данных графиков видно, что кривые, соответствующие $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схеме в калибровке $\xi = -1$, практически совпадают вне зависимости от порядка ТВ. Кривая, полученная для случая калибровки Ландау $\xi = 0$, в двух, трёх и четырёхпетлевом приближении расположена чуть ниже предыдущих. Поведение $R(s)$ в калибровке $\xi = -3$ заметно отличается от остальных, особенно в области низких энергий. Данный факт, возможно, связан с наибольшим изменением начального значения $\xi = -3$ при вариации масштабного фактора в область рассматриваемых энергий по сравнению с калибровками $\xi = 0, -1$. Кроме того, из Таблицы 1.2 следует, что в калибровке $\xi = -3$ отрицательные двухпетлевые коэффициенты $R(s)$ -отношения превосходят по абсолютной величине аналогичные $\mathcal{O}(a_s^2)$ коэффициенты в mMOM-схеме для $\xi = 0, -1$ (в случае функции Бьёркена, наоборот, они оказываются самыми малыми по модулю), т.е. вычитается наибольший вклад, не перебиваемый эффектом разного бега константы связи для разных значений ξ .

Однако, при переходе от NLO порядка ТВ к N³LO все указанные кривые приближаются друг к другу, что свидетельствует о сходимости ряда теории возмущений для $R(s)$ -отношения по крайней мере в рассматриваемом четырёхпетлевом приближении и об уменьшении схемной и калибровочной зависимости с ростом порядка ТВ.

1.8. Квантовоэлектродинамический предел

Рассмотрим теперь случай квантовой электродинамики с N заряженными лептонами. Используя полученное нами аналитическое четырёхпетлевое выражение для β -функции в V-схеме (1.69-1.72) в случае цветовой калибровочной группы $SU(N_c)$, мы можем осуществить предельный переход к группе $U(1)$ и найти соответствующую КЭД β -функцию в V-схеме. Данный переход может быть выполнен посредством замены $SU(N_c)$ -групповых весов на их $U(1)$ -аналоги:

$$C_A = 0, C_F = 1, T_F = 1, d_A^{abcd} = 0, d_F^{abcd} = 1, N_A = 1, d^{abc} = 1, d_R = 1. \quad (1.136)$$

При этом количество активных ароматов кварков мы полагаем равным $n_f = N$.

Учитывая замены (1.136) и выражения (1.69-1.72), получаем четырёхпетлевое аналити-

ческое выражение для РГ β -функции в квантовой электродинамике в V-схеме:

$$\begin{aligned} \beta_{QED}^V(a_V) = & \frac{1}{3}Na_V^2 + \frac{1}{4}Na_V^3 + \left[-\frac{1}{32}N + \left(\frac{1}{3}\zeta_3 - \frac{23}{72}\right)N^2 \right] a_V^4 \\ & + \left[-\frac{23}{128}N + \left(\frac{13}{32} + \frac{2}{3}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_5 + \frac{2}{3}\mathcal{C}\right)N^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\zeta_3\right)N^3 \right] a_V^5, \end{aligned} \quad (1.137)$$

где $a_V = \alpha_V/\pi$ — константа связи КЭД в V-схеме, а постоянная \mathcal{C} определена нами выше в уравнении (1.49) и содержит вклады типа π^6 , $\pi^4 \ln 2$, $\pi^2 \zeta_3 \ln 2$ и проч. Численный эффект поправки $2\mathcal{C}/3 = -0.59204$ не является пренебрежимо малым по сравнению со вкладом остальной, пропорциональной $N^2 a_V^5$, поправки, а наоборот, даже доминирует над ним. В самом деле, $13/32 + 2\zeta_3/3 - 5\zeta_5/3 = -0.52059$.

Величина поправки $2\mathcal{C}/3$ численно согласуется с результатами более ранних полуаналитических вычислений β_{QED}^V -функции в четырёхпетлевом приближении [25], где этот эффект был представлен в виде $-56.83(1)/96$ с теоретической погрешностью вычислений, следующей из расчётов трёхпетлевого коэффициента $a_3^{(1)}$ к статическому потенциалу КХД [97].

Переход к случаю $U(1)$ калибровочной группы в mMOM-схеме даёт следующий результат (см. (1.116-1.118) и [138, 148]):

$$\begin{aligned} \beta_{QED}^{\text{mMOM}}(a_{\text{mMOM}}) = & \frac{1}{3}Na_{\text{mMOM}}^2 + \frac{1}{4}Na_{\text{mMOM}}^3 + \left[-\frac{1}{32}N + \left(\frac{1}{3}\zeta_3 - \frac{23}{72}\right)N^2 \right] a_{\text{mMOM}}^4 \\ & + \left[-\frac{23}{128}N + \left(\frac{13}{32} + \frac{2}{3}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_5\right)N^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\zeta_3\right)N^3 \right] a_{\text{mMOM}}^5. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Выражение (1.138) совпадает с результатом для КЭД β -функции в MOM-схеме импульсных вычитаний, тождественной Ψ -функции Гелл-Манна–Лоу [1, 155, 156], которая определяет бег схемно- и калибровочно-независимого (вследствие тождества Уорда) инвариантного заряда КЭД:

$$a_{\text{MOM}}(\mu^2) = a_{\text{inv}}(\mu^2) = \frac{a(\mu^2)}{1 + \Pi_{QED}(\mu^2)}. \quad (1.139)$$

Обоснование равенства $\beta_{QED}^{\text{mMOM}}$ и Ψ -функций (в любом порядке ТВ) может быть легко получено из соотношения (1.106). Действительно, поскольку в случае КЭД-предела скалярный оператор собственной энергии духов равен нулю, то справедливо равенство:

$$a_{\text{mMOM}}(\mu^2) = \frac{a(\mu^2)}{1 + \Pi_{QED}(\mu^2)}. \quad (1.140)$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $a_{\text{mMOM}} \equiv a_{\text{MOM}} = a_{\text{inv}}$.

Сравнивая выражения (1.137) и (1.138), мы приходим к заключению о том, что на трёхпетлевом уровне β_{QED}^V полностью совпадает с функцией Гелл-Манна–Лоу Ψ . Различие между ними начинает проявляться лишь в $N^3\text{LO}$ порядке ТВ благодаря единственному дополнительному слагаемому $2\mathcal{C}N^2 a^5/3$

$$\beta_{3,QED}^V = \Psi_3 + \frac{2}{3}\mathcal{C}N^2, \quad (1.141)$$

который возникает из-за поправок рассеяния света на свете к статическому потенциалу (см. Рис. 1.3). В рассматриваемом порядке точности диаграммы подобного типа не входят в класс диаграмм, перенормирующих фотонный пропагатор, и, как следствие, в собственно-энергетическую функцию Π_{QED} . Поэтому, выражение для Ψ -функции не содержит данных эффектов.

Полученный результат может быть представлен в следующем компактном виде:

$$a_V = a_{\text{МOM}} + \mathcal{C}N a_{\text{МOM}}^4 + \mathcal{O}(a_{\text{МOM}}^5). \quad (1.142)$$

Анализируя формулы (1.142), (1.61), (1.66), можно заключить, что множитель $2\mathcal{C}N^2/3$ в (1.141), следующий из закона преобразования (при переходе от одной схемы перенормировок к другой) четырёхпетлевого коэффициента β_3 в КЭД, возникает из-за перемножения коэффициента $\mathcal{C}N$ в соотношении (1.142) и фактора $2\beta_0 = 2N/3$ (см. (1.66)).

Обнаруженная особенность приводит к следующему выводу. В связи с тем, что в КХД невозможно напрямую ввести калибровочно-инвариантный аналог MOM-схемы, а следовательно ввести калибровочно-независимый инвариантный заряд, то оказывается невозможным также сконструировать калибровочно-инвариантный аналог функции Гелл-Манна-Лоу в КХД. Прежде всего это связано с тем, что в КХД количество возможных аналогов инвариантных зарядов было бы равно количеству вершин в лагранжиане КХД, т. е. четырём — глюон-кварк-антикварковой, глюон-дух-антидуховой, трёхглюонной и четырёхглюонной вершине. Во-вторых, определения этих инвариантных зарядов зависели бы от кинематических условий для фиксации внешних off-shell импульсов, что приводило бы к различным вариантам MOM-схем и даже к нарушению свойства асимптотической свободы при ненадлежащем выборе калибровочного параметра [157]. Однако, как мы видели, в КЭД β_{QED}^V тождественно совпадает по форме с Ψ -функцией на трёхпетлевом уровне и начинает отличаться в четвёртом порядке ТВ на единственную пропорциональную N^2 поправку. Это обстоятельство позволяет заключить, что V-схему в КЭД можно рассматривать как аналог схемы импульсных вычитаний MOM, в которой возможно построение инвариантного заряда (см. также [110]).

Зависимость от числа заряженных лептонов в выражениях (1.137) и (1.138) может быть представлена следующим образом:

$$\beta_{QED}^V(a_V) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_{i,QED}^V a_V^{i+2} = \beta_{0,QED}^{V(1)} N a_V^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{i,QED}^{V(k)} N^k a_V^{i+2}, \quad (1.143)$$

$$\Psi(a_{\text{МOM}}) = \Psi_0^{(1)} N a_{\text{МOM}}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \Psi_i^{(k)} N^k a_{\text{МOM}}^{i+2}. \quad (1.144)$$

Как мы убедились, часть N -зависимых членов в β_{QED}^V будет совпадать с соответствующими коэффициентами Ψ -функции, а оставшаяся часть будет получать дополнительные вклады от диаграмм типа рассеяния света на свете. Поэтому

$$\beta_{i,QED}^{V(k)} = \Psi_i^{(k)} + \Delta\beta_{i,QED}^{V(k)}, \quad (1.145)$$

где дополнительные слагаемые $\Delta\beta_{i,QED}^{V(k)}$ возникают только для индексов $\{i, k\} = \{i \geq 3, 2 \leq k \leq i - 1\}$. Данный факт непосредственно следует из формул (1.67), (1.68) и их обобщений на случаи более высоких порядков ТВ.

В случае, когда $\{i, k\} = \{i \geq 3, k = 1 \text{ или } i\}$ коэффициенты β_{QED}^V и Ψ -функций одинаковы. Что мы и наблюдаем на четырёхпетлевом уровне (соответствующие аналитические N и N^3 -выражения впервые были получены в работе [156]):

$$\beta_{3,QED}^{V(1)} = \Psi_3^{(1)} = -\frac{23}{128}, \quad \beta_{3,QED}^{V(3)} = \Psi_3^{(3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\zeta_3, \quad (1.146)$$

и будем наблюдать на пятипетлевом уровне, вычисления для которого выполнены в [158]:

$$\beta_{4,QED}^{V(1)} = \Psi_4^{(1)} = \frac{4157}{6144} + \frac{1}{8}\zeta_3, \quad \beta_{4,QED}^{V(4)} = \Psi_4^{(4)} = -\frac{67}{72} + \frac{7}{18}\zeta_3 + \frac{5}{9}\zeta_5. \quad (1.147)$$

Как объяснено в [159], схемная независимость линейных по N вкладов в β -функции в безмассовой КЭД является следствием её конформной симметрии. Для большей наглядности приведём численные значения коэффициентов β_{QED}^V и Ψ -функций при $N = 1$:

$$\Psi(a_{\text{МОМ}}) = 0.3333a_{\text{МОМ}}^2 + 0.25a_{\text{МОМ}}^3 + 0.0499a_{\text{МОМ}}^4 - 0.60096a_{\text{МОМ}}^5, \quad (1.148)$$

$$\beta_{QED}^V(a_V) = 0.3333a_V^2 + 0.25a_V^3 + 0.0499a_V^4 - 1.19301a_V^5. \quad (1.149)$$

В заключение данного раздела приводим КЭД аналоги выражений (1.82-1.85), (1.86-1.87), (1.92-1.95), (1.96), (1.120-1.123), (1.124-1.125), (1.131-1.134) для функций Адлера и Бьёркена в V и mМОМ-схеме (поскольку последняя в случае $U(1)$ -группы совпадает с МОМ-схемой, то мы также будем называть её МОМ-схемой):

$$\begin{aligned} D_{V,QED}^{NS} = & 1 + \frac{3}{4}a_V + \left(-\frac{3}{32} + \left[-\frac{23}{24} + \zeta_3 \right] N \right) a_V^2 \\ & + \left(-\frac{69}{128} + \left[\frac{29}{96} + 4\zeta_3 - 5\zeta_5 \right] N + \left[\frac{3}{2} - \zeta_3 \right] N^2 \right) a_V^3 \\ & + \left(\frac{4157}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3 + \left[\frac{79}{256} + \frac{9}{8}\zeta_3 - \frac{215}{8}\zeta_5 + \frac{105}{4}\zeta_7 - \frac{5}{128}\pi^6 + \pi^4 \left[\frac{23}{32} - \frac{\ln 2}{8} + \frac{3}{8}\ln^2 2 \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \pi^2 \left[-\frac{79}{48} + \frac{61}{16}\zeta_3 - \frac{3}{4}\ln 2 - \frac{63}{8}\zeta_3 \ln 2 \right] \right) N + \left[-\frac{125}{384} - \frac{281}{24}\zeta_3 + \frac{25}{2}\zeta_5 + \zeta_3^2 \right] N^2 \right. \\ & \left. + \left[-\frac{67}{24} + \frac{7}{6}\zeta_3 + \frac{5}{3}\zeta_5 \right] N^3 \right) a_V^4, \end{aligned} \quad (1.150)$$

$$\begin{aligned}
D_{\text{MOM}, QED}^{NS} &= 1 + \frac{3}{4}a_{\text{MOM}} + \left(-\frac{3}{32} + \left[-\frac{23}{24} + \zeta_3 \right] N \right) a_{\text{MOM}}^2 \\
&+ \left(-\frac{69}{128} + \left[\frac{29}{96} + 4\zeta_3 - 5\zeta_5 \right] N + \left[\frac{3}{2} - \zeta_3 \right] N^2 \right) a_{\text{MOM}}^3 \\
&+ \left(\frac{4157}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3 + \left[\frac{79}{256} + \frac{9}{8}\zeta_3 - \frac{215}{8}\zeta_5 + \frac{105}{4}\zeta_7 \right] N \right. \\
&\left. + \left[-\frac{125}{384} - \frac{281}{24}\zeta_3 + \frac{25}{2}\zeta_5 + \zeta_3^2 \right] N^2 + \left[-\frac{67}{24} + \frac{7}{6}\zeta_3 + \frac{5}{3}\zeta_5 \right] N^3 \right) a_{\text{MOM}}^4,
\end{aligned} \tag{1.151}$$

$$\begin{aligned}
D_{V, QED}^{SI} &= D_{\text{MOM}, QED}^{SI} = \left(\frac{11}{192} - \frac{\zeta_3}{8} \right) a_{\{V; \text{MOM}\}}^3 \\
&+ \left(-\frac{13}{64} - \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{8}\zeta_5 + \left[-\frac{47}{288} + \frac{19}{96}\zeta_3 - \frac{5}{16}\zeta_5 + \frac{\zeta_3^2}{8} \right] N \right) a_{\{V; \text{MOM}\}}^4,
\end{aligned} \tag{1.152}$$

$$\begin{aligned}
C_{V, QED}^{NS} &= 1 - \frac{3}{4}a_V + \left(\frac{21}{32} + \frac{N}{12} \right) a_V^2 \\
&+ \left(-\frac{3}{128} - \left[\frac{13}{36} - \frac{\zeta_3}{3} \right] N - \frac{5}{24}N^2 \right) a_V^3 + \left(-\frac{4823}{2048} - \frac{3}{8}\zeta_3 + \left[\frac{217}{72} + \frac{133}{24}\zeta_3 - \frac{125}{12}\zeta_5 \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{5}{128}\pi^6 - \pi^4 \left[\frac{23}{32} - \frac{\ln 2}{8} + \frac{3}{8}\ln^2 2 \right] + \pi^2 \left[\frac{79}{48} - \frac{61}{16}\zeta_3 + \frac{3}{4}\ln 2 + \frac{63}{8}\zeta_3 \ln 2 \right] \right) N \\
&\left. + \left[\frac{1891}{3456} - \frac{\zeta_3}{36} \right] N^2 + \frac{5}{72}N^3 \right) a_V^4,
\end{aligned} \tag{1.153}$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{MOM}, QED}^{NS} &= 1 - \frac{3}{4}a_{\text{MOM}} + \left(\frac{21}{32} + \frac{N}{12} \right) a_{\text{MOM}}^2 \\
&+ \left(-\frac{3}{128} - \left[\frac{13}{36} - \frac{\zeta_3}{3} \right] N - \frac{5}{24}N^2 \right) a_{\text{MOM}}^3 + \left(-\frac{4823}{2048} - \frac{3}{8}\zeta_3 + \left[\frac{217}{72} + \frac{133}{24}\zeta_3 \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{125}{12}\zeta_5 \right] N + \left[\frac{1891}{3456} - \frac{\zeta_3}{36} \right] N^2 + \frac{5}{72}N^3 \right) a_{\text{MOM}}^4,
\end{aligned} \tag{1.154}$$

$$C_{V, QED}^{SI} = C_{\text{MOM}, QED}^{SI} = -\frac{N}{27}a_{\{V; \text{MOM}\}}^4. \tag{1.155}$$

Как и в случае β_{QED}^V и Ψ , коэффициенты функции Адлера в V и MOM-схеме совпадают вплоть до трёхпетлевого уровня ТВ и начинают различаться в N³LO приближении, но уже на пропорциональном количеству заряженных лептонов N член, связанный со вкладом диаграмм рассеяния света на свете в трёхпетлевую поправку к статическому кулоновскому потенциалу (тоже самое можно сказать и про функцию Бьёркена):

$$d_{4,V, QED}^{NS} = d_{4,\text{MOM}, QED}^{NS} - \frac{3}{4}\mathcal{C}N, \tag{1.156}$$

$$c_{4,V, QED}^{NS} = c_{4,\text{MOM}, QED}^{NS} + \frac{3}{4}\mathcal{C}N. \tag{1.157}$$

Схемная независимость пропорциональных N^0 членов в КЭД ТВ выражениях для D^{NS} и C_{Bjp}^{NS} была объяснена в работе [159] с точки зрения конформной симметрии, которая сохраняется при учёте лишь планарных диаграмм, дающих пропорциональные N^0 поправки к функции Адлера и Бьёркена и не перенормирующих заряд КЭД.

Синглетные поправки в двух рассматриваемых схемах имеют одинаковые коэффициенты.

Полученные в этой главе формулы и аналитические выражения будут использованы нами в следующей главе при изучении свойств факторизации $\text{P}\Gamma$ β -функции в различных калибровочно-(не)инвариантных схемах в обобщённом соотношении Крютера, связывающим несинглетные вклады в функцию Адлера и Бьёркена и являющимся следствием проявления эффектов нарушения конформной симметрии в безмассовой КХД и КЭД, возникающих из-за применения процедуры перенормировок.

Обобщённое соотношение Крютера

2.1. Введение к главе

Одной из наиболее интересных величин в современной теории электромагнитных и сильных взаимодействий является трёхточечная функция Грина, составленная из аксиал–вектор–векторных (АВВ) фермионных токов. Исследование её свойств позволяет получать важную информацию об амплитуде распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. С теоретической точки зрения рассмотрение соответствующей треугольной диаграммы напрямую связано с изучением аксиальной аномалии и её неперенормируемости в соответствии с теоремой Адлера–Бардина [160].

Коррелятор несинглетных по аромату одного аксиал–векторного $A_\mu^a(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi(x)$ и двух векторных токов $V_\mu^a(x) = \bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi(x)$ определяется стандартным образом:

$$T_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q) = i \int d^4x d^4y \langle 0 | T(A_\mu^a(y) V_\nu^b(x) V_\rho^c(0)) | 0 \rangle e^{i(px+qy)}. \quad (2.1)$$

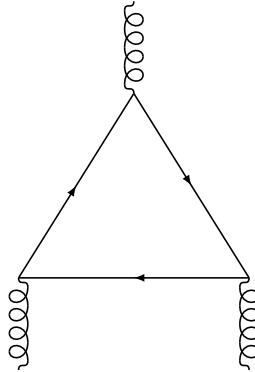


Рис. 2.1: Треугольная диаграмма, соответствующая трёхточечной функции Грина АВВ токов.

В работе [161] было показано, что в координатном пространстве в конформно–инвариантном пределе псевдотензор $T_{\mu\nu\rho}^{abc}(x, y, z)$ размерности 9 пропорционален однопетлевому вкладу диаграммы треугольной аномалии, составленной из безмассовых фермионов:

$$T_{\mu\nu\rho}^{abc}(x, y, z) = \frac{d^{abc}}{16\pi^2} \frac{\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\rho\gamma_\delta)(x-y)^\alpha(y-z)^\beta(z-x)^\delta}{((x-y)^2 - i\varepsilon)^2((y-z)^2 - i\varepsilon)^2((z-x)^2 - i\varepsilon)^2} + \dots, \quad (2.2)$$

где d^{abc} — симметричная структурная константа группы $SU(N_c)$. Разложение (2.2) в правой части содержит также менее сингулярные, но масштабн–неинвариантные вклады, которые, вообще говоря, нарушают конформную симметрию.

В литературе под конформно–инвариантным пределом подразумевается инвариантность относительно конформных преобразований, при которых метрический тензор преобразуется согласно закону $g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$ (см. например [18]). Общеизвестно, что в случае

плоской метрики Минковского данному закону удовлетворяют лишь преобразования Пуанкаре $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$ с $\Omega(x) = 1$, преобразования дилатации $x'^{\mu} = \lambda x^{\mu}$ с $\Omega(x) = 1/\lambda$ и специальные конформные преобразования $x'^{\mu} = (x^{\mu} + a^{\mu} x^2)/\Omega(x)$ с $\Omega(x) = 1 + 2a_{\mu} x^{\mu} + a^2 x^2$. При доказательстве в работе [161] особое внимание уделялось прежде всего инвариантности рассматриваемых комбинаций токов относительно инверсии координат $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu}/x^2$, которая не принадлежит группе конформных преобразований, но формально включена в множество специальных конформных преобразований при больших a . Действительно, раскладывая x'^{μ} в ряд по параметру $1/a^2$, можно получить $x'^{\mu} = a^{\mu}/a^2 + 1/a^2(g^{\mu\nu} - 2a^{\mu}a^{\nu}/a^2)x_{\nu}/x^2 + \dots$, где a^{μ}/a^2 есть трансляция, $1/a^2$ — дилатация, $2a^{\mu}a^{\nu}/a^2 - g^{\mu\nu}$ — ортогональное преобразование Лоренца.

С другой стороны, применение техники операторного разложения к функции Грина АВВ токов в борновском приближении в конформно-инвариантном пределе (без учёта поправок высших размерностей) приводит к соотношению Крютера [162] (см. (2.4)), одного из наиболее ярких следствий конформной симметрии (КС) безмассовой КХД и КЭД. В самом деле, рассматривая предел $|p^2| \gg |q^2|$, $|p^2| \rightarrow \infty$ и применяя операторное разложение к T -произведению двух векторных токов, получаем, согласно уравнениям (1.22-1.23), аксиально-векторный ток и коэффициентную функцию Бьёркена глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах. Последующее интегрирование по x от коррелятора двух оставшихся аксиально-векторных фермионных токов даёт поляризационную функцию

$$i \int d^4x \langle 0 | T(A_{\mu}^a(x) A_{\alpha}^d(0)) | 0 \rangle e^{ipx} = \delta^{ad} (p^2 g_{\mu\alpha} - p_{\mu} p_{\alpha}) \Pi(p^2), \quad (2.3)$$

связанную с функцией Адлера соотношением (1.2).

Сопоставление данных результатов с формулой (2.2) позволило автору работы [162] получить в рамках безмассовой кварк-партоновой модели следующее соотношение

$$D_{Born}^{NS} C_{Bjp, Born}^{NS} = 1, \quad (2.4)$$

в котором левая часть содержит произведение борновских вкладов в функцию Адлера (1.3) и Бьёркена (1.25), а правая часть связана с амплитудой распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, изучение которого свидетельствовало в пользу того, что кварки обладают $N_c = 3$ цветовыми степенями свободы.

В общем случае трёхточечная функция Грина АВВ токов может быть выражена через 6 инвариантных формфакторов [163]. Данное обстоятельство связано с тем, что при вычислении поправок ТВ к рассматриваемому коррелятору в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в рамках размерной регуляризации необходимо самосогласованным образом ввести определение матрицы γ_5 на

случай произвольного числа измерений. Решение данной задачи было сформулировано в работе [164], в соответствии с которой комбинацию $\gamma_\mu \gamma_5$ необходимо заменить на $i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \Gamma^{[\nu\lambda\rho]}/3!$, где $\Gamma^{[\nu\lambda\rho]}$ — антисимметричный по всем индексам тензор, составленный из трёх γ -матриц Дирака. В такой прескрипции аксиальный ток требует дополнительной конечной перенормировки. Однако, в специальном случае, отвечающем кинематике $(pq) = 0$, трёхточечная функция Грина АВВ токов выражается через 3 формфактора [165], один из которых связан с аксиальной аномалией, а два других могут быть выражены друг через друга посредством киральной симметрии и связаны с соотношением Крютера (2.4).

Интересные предсказания были получены в работе [166], где отмечалось, что планарные диаграммы (без вставок внутренних фермионных петель в фотонный пропагатор) для коррелятора АВВ токов не будут его перенормировать во всех порядках ТВ. Позднее этот вывод был подтверждён в [167] непосредственными вычислениями на двухпетлевом уровне в случае произвольной кинематики не только в КЭД, но и в КХД. Однако, начиная с трёхпетлевого уровня ТВ, трёхточечная функция Грина АВВ токов перенормируется (кроме формфактора, связанного с аксиальной аномалией) и её поправки прямо пропорциональны β -функции КХД (КЭД) [163], а значит исчезают в конформно-инвариантном пределе. Теперь становится понятным смысл предсказаний, сделанных в [166], и вычислений [167]. Действительно, на двухпетлевом уровне в АВВ корреляторе не возникает диаграмм, перенормирующих константу связи КХД (КЭД), а поэтому конформная симметрия не нарушается (см. [159]). Это приводит к обобщению соотношения Крютера (2.4) на случай учёта $\mathcal{O}(\alpha_s)$ поправок:

$$D^{NS}(a_s)C_{Bjp}^{NS}(a_s) = 1. \quad (2.5)$$

Данная формула свидетельствует о том, что совпадение первого коэффициента функции Адлера с аналогичным коэффициентом функции Бьёркена, но с обратным знаком ($d_1^{NS} = 3C_F/4 = -c_1^{NS}$ [38, 39, 78]), не случайно, а соответствует сохранению конформной симметрии в этом приближении.

В работе [159] было показано, что в случае КЭД под конформно-инвариантным пределом надо понимать ситуацию, когда фиксированная не зависящая от масштаба константа связи совпадает со своим неперенормированным аналогом, т.е. когда константа перенормировки поля фотона $Z_3 = 1$. Тогда КЭД аналог равенства (2.5) будет справедливым во всех порядках ТВ. Ситуация в КХД не столь прозрачная, поскольку вместо тождества Уорда $Z_1 = Z_2$ нужно рассматривать более сложные тождества Славнова–Тейлора. Однако, полагая $a_s = a_{s,B}$, мы также придём к справедливости уравнения (2.5) в конформно-инвариантном пределе во всех порядках ТВ в КХД [159].

Долгое время было непонятно, как будет выглядеть аналог соотношения Крютера (2.5) в случае действительно реализуемых в природе реальных теорий электромагнитных и сильных взаимодействий (но в безмассовом пределе), где наблюдается бег константы связи и, как результат, конформная симметрия нарушается. Ответ на этот вопрос был дан в [152]. В соответствии с результатами этой работы, выполненными в рамках калибровочно-инвариантной $\overline{\text{MS}}$ -схемы перенормировок, начиная с $\mathcal{O}(a_s^2)$ уровня ТВ соотношение Крютера (2.5) получает дополнительный вклад $\Delta_{csb}(a_s)$, ответственный за проявление эффекта нарушения КС и явно пропорциональный двухпетлевой РГ β -функции (1.17):

$$D^{NS}(a_s)C_{Bjp}^{NS}(a_s) = 1 + \Delta_{csb}(a_s), \quad (2.6)$$

$$\Delta_{csb}(a_s) = \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right) K(a_s), \quad (2.7)$$

где $K(a_s)$ — полином по степеням a_s . Существующие на тот момент трёхпетлевые вычисления функций Адлера [40–42], [43, 44] и Бьёркена [81], [82] позволили авторам работы [152] получить первые два коэффициента полинома $K(a_s)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$K(a_s) = \sum_{i \geq 1} K_i a_s^i, \quad (2.8)$$

$$K_1^{\overline{\text{MS}}} = \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3 \right) C_F, \quad (2.9)$$

$$K_2^{\overline{\text{MS}}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{629}{32} + \frac{221}{12}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{163}{24} - \frac{19}{3}\zeta_3 \right) C_F T_F n_f. \quad (2.10)$$

Появление вклада, пропорционального β -функции в правой части равенства (2.6), непосредственно связано с результатами работы [163], где было показано явными вычислениями на трёхпетлевом уровне, что перенормируемые формфакторы трёхточечной функции Грина пропорциональны первому схемно-независимому коэффициенту β_0 , и работы [165], где показана связь этих формфакторов с соотношением Крютера.

Гораздо позднее обобщённое соотношение Крютера (**ОСК**) (2.6) было подтверждено явными вычислениями на четырёхпетлевом уровне в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [46]. Соответствующий коэффициент $K_3^{\overline{\text{MS}}}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} K_3^{\overline{\text{MS}}} = & \left(\frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7 \right) C_F^3 + \left(\frac{99757}{2304} + \frac{8285}{96}\zeta_3 \right) \\ & - \frac{1555}{12}\zeta_5 - \frac{105}{8}\zeta_7 \Big) C_F^2 C_A + \left(-\frac{406043}{2304} + \frac{18007}{144}\zeta_3 + \frac{2975}{48}\zeta_5 - \frac{77}{4}\zeta_3^2 \right) C_F C_A^2 \\ & + \left(-\frac{7729}{1152} - \frac{917}{16}\zeta_3 + \frac{125}{2}\zeta_5 + 9\zeta_3^2 \right) C_F^2 T_F n_f + \left(\frac{1055}{9} - \frac{2521}{36}\zeta_3 \right. \\ & \left. - \frac{125}{3}\zeta_5 - 2\zeta_3^2 \right) C_F C_A T_F n_f + \left(-\frac{307}{18} + \frac{203}{18}\zeta_3 + 5\zeta_5 \right) C_F T_F^2 n_f^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для более наглядного понимания структуры ОСК используем разложения функции Адлера, Бьёркена, β -функции и $K(a_s)$ в ряд ТВ и представим соотношение (2.6) в каждом порядке ТВ вплоть до четвёртого в следующем виде (см. в частности [27, 46, 152]):

$$d_1 + c_1 = 0, \quad (2.12)$$

$$d_2 + c_2 + d_1 c_1 = -\beta_0 K_1, \quad (2.13)$$

$$d_3 + c_3 + d_1 c_2 + c_1 d_2 = -\beta_1 K_1 - \beta_0 K_2, \quad (2.14)$$

$$d_4 + c_4 + d_1 c_3 + c_1 d_3 + d_2 c_2 = -\beta_2 K_1 - \beta_1 K_2 - \beta_0 K_3. \quad (2.15)$$

Как мы уже говорили, выполнение равенства (2.12) есть следствие конформной симметрии, выражающееся в отсутствии $\mathcal{O}(a_s)$ -поправок в члене Δ_{csb} , её нарушающем. Выражения типа (2.13-2.15) всегда будут выполняться при наличии факторизации β -функции в ОСК¹.

Как видно, в формулу (2.15) входит комбинация $d_4 + c_4$, в которой слагаемые, пропорциональные $d_F^{abcd} d_A^{abcd}/d_R$ и $d_F^{abcd} d_F^{abcd} n_f/d_R$ и входящие в четырёхпетлевые коэффициенты $D^{NS}(a_s)$ и $C_{Bjp}^{NS}(a_s)$ -функций (см. (1.8) и (1.30)), взаимно уничтожаются. В противном случае, факторизация β -функции в ОСК отсутствовала бы в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении. Из формул (2.14-2.15) также следует, что факторизация в ОСК справедлива только для несинглетных функций Адлера процесса e^+e^- аннигиляции в адроны и Бьёркена правила сумм глубоко-конечного рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах, поскольку их синглетные вклады, пропорциональные $d^{abc} d^{abc}$ цветовой структуре, начинают появляться в разных порядках ТВ: в третьем — для $D(a_s)$, и в четвёртом — для $C_{Bjp}(a_s)$.

В настоящее время не существует строгого доказательства обобщённого соотношения Крютера из первых принципов квантовой теории поля. Однако, теоретические аргументы в пользу справедливости ОСК во всех порядках ТВ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме имеются и приведены в работах [165, 168, 169].

До сих пор ОСК в виде (2.6) исследовалось в литературе лишь в $\overline{\text{MS}}$, или точнее в MS-подобных схемах перенормировок. В связи с этим распространено мнение, что одна из причин выполнения ОСК заключается в калибровочной инвариантности схем вычитания УФ расходимостей. В данной главе мы докажем, что это не так, и ОСК справедливо в некоторых случаях, когда используются калибровочно-неинвариантные схемы в КХД. Кроме того, мы остановимся на исследовании схемной зависимости данного соотношения.

Вопрос о калибровочной и схемной зависимости ОСК во многом схож такому же вопросу для конформной аномалии в следе тензора энергии-импульса в безмассовой КХД.

¹ Из-за отсутствия общего знака минус в определении β -функции КЭД, $U(1)$ -аналоги формул (2.13-2.15) будут содержать знаки плюс вместо минусов в их правых частях.

Действительно, известно, что в киральном пределе действие с голым лагранжианом КХД инвариантно относительно преобразований дилатации $x_\mu \rightarrow \lambda x_\mu$. По теореме Нётер данной симметрии соответствует сохраняющийся дилатационный ток $D^\mu = x_\nu T^{\mu\nu}$, связанный с сохраняющимся тензором энергии–импульса $T^{\mu\nu}$. Тогда в данной конформно–инвариантной теории должно выполняться соотношение $\partial_\mu D^\mu = T^\mu_\mu = 0$ (аналогичное соотношение можно получить и для специальных конформных преобразований). Однако, квантовые поправки нарушают конформную симметрию [170–174]:

$$\partial_\mu D^\mu = T^\mu_\mu = \frac{\beta(a_s)}{2a_s} G^{a\mu\nu} G^a_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Данное соотношение было получено в рамках калибровочно–инвариантной $\overline{\text{MS}}$ -схемы и не рассматривалось в других, отличных от MS -подобных, схемах. Однако, ясно, что уравнение (2.16) должно быть как схемно–зависимым, так и, возможно, калибровочно–зависимым, поскольку явно содержит β -функцию. Исследование этих вопросов в калибровочно–неинвариантных схемах перенормировок весьма интересно с теоретической точки зрения. Далее, основываясь на наших результатах по исследованию обобщённого соотношения Крютера в MOM -подобных схемах, мы выскажем гипотезу по поводу справедливости соотношения (2.16) также и в калибровочно–неинвариантных схемах вычитаний УФ расходимостей в калибровке Ландау.

2.2. Схемная зависимость обобщённого соотношения Крютера в КЭД

Вернёмся к обсуждению ОСК и вопросов, поднятых во введении к данной главе. Опираясь на известные в литературе данные, в работе [27] было высказано предположение, что калибровочная инвариантность схем перенормировок является *достаточным* условием для справедливости ОСК в форме (2.6) по крайней в четвёртом порядке ТВ. Изучим этот вопрос вначале для случая КЭД, где все вышеописанные схемы перенормировок (в том числе и MOM) из-за выполнения тождества Уорда являются калибровочно–инвариантными. Заодно исследуем и вопрос о схемной зависимости ОСК в КЭД.

Начнём с рассмотрения V -схемы. Используя результат (1.137) для $\beta_{QED}^V(a_V)$ -функции и аналитические выражения (1.150), (1.153) для несинглетных вкладов в функцию Адлера и Бьёркена, полученные в предыдущей главе, а также $U(1)$ -аналог формулы (2.6), находим

коэффициенты полинома $K_{QED}^V(a_V)$:

$$K_{1,QED}^V = -\frac{21}{8} + 3\zeta_3, \quad (2.17)$$

$$K_{2,QED}^V = \frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 + \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3\right)N, \quad (2.18)$$

$$K_{3,QED}^V = \frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7 \quad (2.19)$$

$$+ \left(-\frac{1273}{144} - \frac{599}{24}\zeta_3 + \frac{75}{2}\zeta_5\right)N + \left(-\frac{49}{6} + \frac{7}{2}\zeta_3 + 5\zeta_5\right)N^2.$$

Полученные коэффициенты, являющиеся полиномами по степеням количества заряженных лептонов N , свидетельствуют о наличии факторизации $\beta_{QED}^V(a_V)$ -функции в ОСК в 4-м порядке ТВ. Данный результат, естественно, согласуется с формулами (2.12-2.15). В последнюю, кстати, входит комбинация $d_4 + c_4$, в которой вклады эффектов рассеяния света на свете типа π^6 , $\pi^4 \ln 2$, $\pi^4 \ln^2 2$, $\pi^2 \zeta_3$, $\pi^2 \ln 2$ и $\pi^2 \zeta_3 \ln 2$ (см. (1.150) и (1.153)) взаимно уничтожаются. Данный факт непосредственно виден из выражения (2.19). Следствием этого замечания и совпадения функций D^{NS} и C_{Bjp}^{NS} в V и MOM-схеме в КЭД в третьем порядке ТВ, а также коэффициентов β_{QED}^V и функции Гелл-Манна–Лоу в том же порядке являются следующие соотношения:

$$K_{1,QED}^{MOM} = K_{1,QED}^V, \quad K_{2,QED}^{MOM} = K_{2,QED}^V, \quad K_{3,QED}^{MOM} = K_{3,QED}^V, \quad (2.20)$$

которые свидетельствуют о наличии факторизации функции Гелл-Манна–Лоу в ОСК в КЭД в $\mathcal{O}(a_s^4)$ -приближении.

Итак, в КЭД мы обнаружили, что ОСК остаётся справедливым не только в \overline{MS} -схеме, но и в калибровочно-инвариантных V и MOM-схемах. Однако, для большей уверенности рассмотрим ещё одну калибровочно-независимую в КЭД схему — схему вычитаний УФ расходимостей на массовой поверхности (OS). В этой схеме перенормировки вычитания производятся в точке $p^2 = M^2$ для диаграмм с внешними фермионными линиями (при этом M^2 — полюсная масса лептона) и $q^2 = 0$ — с внешними фотонными линиями. Соответствующая β -функция в OS-схеме в КЭД связана с $\beta^{\overline{MS}}$ согласно общему правилу:

$$\beta^{OS}(a^{OS}) = \beta^{\overline{MS}}(a^{\overline{MS}}) \partial a^{OS} / \partial a^{\overline{MS}}. \quad (2.21)$$

В этой физической схеме перенормировки вычисления трёх и четырёхпетлевых коэффициентов β_2^{OS} и β_3^{OS} были осуществлены в [175] и [176] соответственно:

$$\beta^{OS}(a^{OS}) = \frac{1}{3}N(a^{OS})^2 + \frac{1}{4}N(a^{OS})^3 + \left(-\frac{1}{32}N - \frac{7}{18}N^2\right)(a^{OS})^4 \quad (2.22)$$

$$+ \left(-\frac{23}{128}N + \left[\frac{1}{48} - \frac{5}{6}\zeta_2 + \frac{4}{3}\zeta_2 \ln 2 - \frac{35}{96}\zeta_3\right]N^2 + \left[\frac{901}{1296} - \frac{4}{9}\zeta_2 - \frac{7}{96}\zeta_3\right]N^3\right)(a^{OS})^5.$$

Как указано в работе [176] выбором масштаба $\mu_{\overline{\text{MS}}}^2 = M^2$ можно занулить первый $\mathcal{O}(a)$ коэффициент в отношении $a^{\overline{\text{MS}}}(\mu_{\overline{\text{MS}}}^2 = M^2)/a^{OS} = Z_3^{\overline{\text{MS}}}(\mu_{\overline{\text{MS}}}^2 = M^2)/Z_3^{OS}$. Используя этот факт, отражающий свободу фиксации параметра μ^2 , и соотношение (2.21), можно получить разложение между $a^{\overline{\text{MS}}}$ и a^{OS} (этот же результат может быть получен исходя из ренорминвариантности инвариантного заряда в КЭД):

$$a^{\overline{\text{MS}}} = a^{OS} + \frac{15}{16}N(a^{OS})^3 + \left(\left[\frac{77}{576} + \frac{5}{4}\zeta_2 - 2\zeta_2 \ln 2 + \frac{\zeta_3}{192} \right] N + \left[-\frac{695}{648} + \frac{2}{3}\zeta_2 + \frac{7}{64}\zeta_3 \right] N^2 \right) (a^{OS})^4. \quad (2.23)$$

Поступая аналогично предыдущей главе, находим:

$$D_{OS, QED}^{NS}(a^{OS}) = 1 + \sum_{k=1}^4 d_k^{OS}(a^{OS})^k, \quad (2.24)$$

$$d_1^{OS} = \frac{3}{4}, \quad d_2^{OS} = -\frac{3}{32} + \left(-\frac{11}{8} + \zeta_3 \right) N, \quad (2.25)$$

$$d_3^{OS} = -\frac{69}{128} + \left(\frac{1}{4} + \frac{19}{4}\zeta_3 - 5\zeta_5 \right) N + \left(\frac{151}{54} - \frac{19}{9}\zeta_3 \right) N^2, \quad (2.26)$$

$$d_4^{OS} = \frac{4157}{2048} + \frac{3}{8}\zeta_3 + \left(\frac{55}{32} + \frac{15}{16}\zeta_2 + \frac{537}{256}\zeta_3 - \frac{115}{4}\zeta_5 + \frac{105}{4}\zeta_7 - \frac{3}{2}\zeta_2 \ln 2 \right) N + \left(-\frac{11}{144} + \frac{\zeta_2}{2} - \frac{17089}{768}\zeta_3 + \frac{125}{6}\zeta_5 + 3\zeta_3^2 \right) N^2 + \left(-\frac{6131}{972} + \frac{203}{54}\zeta_3 + \frac{5}{3}\zeta_5 \right) N^3, \quad (2.27)$$

и

$$C_{Bjp, OS, QED}^{NS}(a^{OS}) = 1 + \sum_{k=1}^4 c_k^{OS}(a^{OS})^k, \quad (2.28)$$

$$c_1^{OS} = -\frac{3}{4}, \quad c_2^{OS} = \frac{21}{32} + \frac{N}{2}, \quad (2.29)$$

$$c_3^{OS} = -\frac{3}{128} + \left(-\frac{269}{288} - \frac{5}{12}\zeta_3 \right) N - \frac{115}{216}N^2, \quad (2.30)$$

$$c_4^{OS} = -\frac{4823}{2048} - \frac{3}{8}\zeta_3 + \left(\frac{5315}{2304} - \frac{15}{16}\zeta_2 + \frac{4373}{768}\zeta_3 - \frac{205}{24}\zeta_5 + \frac{3}{2}\zeta_2 \ln 2 \right) N + \left(\frac{2215}{1728} - \frac{\zeta_2}{2} + \frac{865}{768}\zeta_3 \right) N^2 + \frac{605}{972}N^3. \quad (2.31)$$

Подставляя выражения (2.24), (2.28), (2.22) в КЭД аналог формулы (2.6), получаем [27]:

$$K_{1, QED}^{OS} = K_{1, QED}^{\overline{\text{MS}}} = K_{1, QED}^V = K_{1, QED}^{\text{MOM}} = -\frac{21}{8} + 3\zeta_3, \quad (2.32)$$

$$K_{2, QED}^{OS} = K_{2, QED}^{\overline{\text{MS}}} = \frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 + \left(\frac{163}{24} - \frac{19}{3}\zeta_3 \right) N, \quad (2.33)$$

$$K_{3, QED}^{OS} = \frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7 + \left(-\frac{8117}{576} - \frac{391}{8}\zeta_3 + \frac{125}{2}\zeta_5 + 9\zeta_3^2 \right) N + \left(-\frac{307}{18} + \frac{203}{18}\zeta_3 + 5\zeta_5 \right) N^2. \quad (2.34)$$

Выполнение равенства (2.33) есть следствие нулевого $\mathcal{O}(a)$ члена в соотношении (2.23).

Резюмируя, отметим, что, как это и должно быть, первый коэффициент K_1 оказался схемно–независимым. Во втором коэффициенте схемная зависимость проявляется лишь во вкладах, пропорциональных количеству заряженных лептонов N , а в третьем — в пропорциональных N и N^2 .

Итак, мы приходим к следующему выводу: в КЭД факторизация трёхпетлевой β -функции в обобщённом соотношении Крютера (2.6) наблюдается не только в MS-подобных схемах, но также будет выполняться и в калибровочно–инвариантных V, MOM и OS-схемах. Это обстоятельство служит указанием того, что исследуемое нами свойство факторизации будет иметь место во всех калибровочно–инвариантных схемах перенормировок, даже в КХД. Далее мы докажем справедливость этого утверждения. В случае КЭД оно будет объясняться выполнением тождества Уорда. В КХД схемная и калибровочная зависимость ОСК будет изучаться нами в следующем разделе.

2.3. Схемная и калибровочная зависимость обобщённого соотношения Крютера в КХД

В начале этого параграфа покажем, что ОСК схемно–зависимо даже в рамках MS-подобных схем перенормировок, отличающихся добавлением к вычитаемому полюсу, полученному в рамках размерной регуляризации, всевозможных конечных констант. Так, вычитаемые сингулярности в $\overline{\text{MS}}$ и MS-схемах отличаются на трансцендентную константу $\ln 4\pi - \gamma_E$, а поэтому соответствующие масштабы связаны следующим образом $\tilde{\mu}^2 = \mu^2 \exp(\ln 4\pi - \gamma_E)$. Учитывая бег константы связи (A.7) при переходе от одного произвольного масштаба к другому $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$, а также ренорминвариантность $D(a_s)$ -функции, мы приходим к соотношениям, связывающим коэффициенты функции Адлера (эту же процедуру можно применить к любой ренорминвариантной величине), нормированные на разных масштабах:

$$\tilde{d}_1 = d_1, \quad (2.35)$$

$$\tilde{d}_2 = d_2 + \beta_0 d_1 L, \quad (2.36)$$

$$\tilde{d}_3 = d_3 + (\beta_1 d_1 + 2\beta_0 d_2)L + \beta_0^2 d_1 L^2, \quad (2.37)$$

$$\tilde{d}_4 = d_4 + (\beta_2 d_1 + 2\beta_1 d_2 + 3\beta_0 d_3)L + \left(\frac{5}{2}\beta_0 \beta_1 d_1 + 3\beta_0^2 d_2\right)L^2 + \beta_0^3 d_1 L^3, \quad (2.38)$$

где $L = \ln \tilde{\mu}^2 / \mu^2$. Пользуясь данными соотношениями и формулами (2.12–2.15), а также тем фактом, что коэффициенты β -функции в MS-подобных схемах не зависят от масштаба, на-

ходим [27]:

$$\tilde{K}_1 = K_1, \quad (2.39)$$

$$\tilde{K}_2 = K_2 + 2\beta_0 K_1 L, \quad (2.40)$$

$$\tilde{K}_3 = K_3 + 3(\beta_1 K_1 + \beta_0 K_2)L + 3\beta_0^2 K_1 L^2. \quad (2.41)$$

Данные результаты подтверждают выводы работы [177]. Таким образом, в рамках MS-подобных схем первый коэффициент конформно-нарушающего вклада ОСК является схемным инвариантом, чего нельзя сказать об остальных коэффициентах. Однако, в этом классе схем масштабные преобразования не нарушают свойство факторизации $SU(N_c)$ β -функции в ОСК, а лишь модифицируют соответствующие коэффициенты K_i согласно формулам (2.39-2.41).

2.3.1. Факторизация β -функции в обобщённом соотношении Крютера в КХД в V-схеме

Перейдём к более подробному изучению нашей идеи о справедливости ОСК в любых калибровочно-инвариантных схемах перенормировок в КХД. Исследуем вначале этот вопрос на примере V-схемы.

Используя полученные нами аналитические выражения для D^{NS} (1.81) и C_{Bjp}^{NS} (1.91), а также для β (1.69-1.71) [95, 96] в V-схеме в случае $SU(N_c)$ калибровочной группы, находим КХД аналоги формул (2.17-2.19):

$$K_1^V = \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3 \right) C_F, \quad (2.42)$$

$$K_2^V = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{1453}{96} + \frac{53}{4}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} K_3^V = & \left(\frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7 \right) C_F^3 + \left(\frac{75143}{2304} + \frac{2059}{32}\zeta_3 \right. \\ & - \frac{545}{6}\zeta_5 - \frac{105}{8}\zeta_7 \left. \right) C_F^2 C_A - \left(\frac{1273}{144} + \frac{599}{24}\zeta_3 - \frac{75}{2}\zeta_5 \right) C_F^2 T_F n_f + \left(-\frac{71389}{576} \right. \\ & + \frac{15235}{192}\zeta_3 + \frac{2975}{48}\zeta_5 - \frac{187}{8}\zeta_3^2 + \frac{63}{32}\pi^2 - \frac{9}{4}\pi^2\zeta_3 - \frac{63}{512}\pi^4 + \frac{9}{64}\pi^4\zeta_3 \left. \right) C_F C_A^2 \\ & + \left(\frac{40931}{576} - \frac{1771}{48}\zeta_3 - \frac{125}{3}\zeta_5 + \frac{17}{2}\zeta_3^2 \right) C_F C_A T_F n_f - \left(\frac{49}{6} - \frac{7}{2}\zeta_3 - 5\zeta_5 \right) C_F T_F^2 n_f^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Появление дополнительных π^2 , $\pi^2\zeta_3$, π^4 и $\pi^4\zeta_3$ членов в неабелевой части (2.44) по сравнению со случаем $\overline{\text{MS}}$ -схемы (2.11) связано с учётом поправок к статическому потенциалу. Как уже отмечалось ранее, вклады эффектов рассеяния света на свете и высшие трансцендентные константы типа π^6 , s_6 , $\pi^4 \ln^2 2$, $\pi^2 \alpha_4$ и проч. сокращаются в сумме $d_4 + c_4$ (2.15).

Таким образом, формулы (2.42-2.44) свидетельствуют о наличии факторизации трёхпетлевой $\beta^V(a_{s,V})$ -функции в ОСК в КХД.

Ниже мы приведём более общее доказательство и покажем, что ОСК будет выполняться во всех калибровочно-инвариантных схемах перенормировок в КХД по крайней мере в 4-ом порядке теории возмущений.

2.3.2. Факторизация β -функции в обобщённом соотношении Крютера в mMOM-схеме

Перейдём теперь к изучению ОСК в калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок. Вначале остановимся на исследуемой в прошлой главе mMOM-схеме. Здесь, по сравнению с $\overline{\text{MS}}$ и V-схемой, ситуация более интересная, поскольку выражения для функций Адлера, Бьёркена и β непосредственно зависят от дополнительного калибровочного параметра ξ (см. (1.119), (1.130), (1.117-1.118)). Несмотря на это, первый коэффициент K_1^{mMOM} , входящий в Δ_{csb} , не только не зависит от калибровки, но и совпадает с его $\overline{\text{MS}}$ и V аналогами:

$$K_1^{\text{mMOM}} = \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3 \right) C_F, \quad (2.45)$$

оставаясь таким образом не зависящим от схемы вычитаний. В таком случае ОСК выполняется на двухпетлевом уровне (по порядку входящих в него D^{NS} и C_{Bjp}^{NS} функций) при любых значениях ξ .

На трёхпетлевом уровне ситуация более сложная. В самом деле, используя теперь выведенные нами $\mathcal{O}(a_s^3)$ аналитические выражения [27] для функций Адлера (1.120-1.122) и Бьёркена (1.131-1.133), а также для β^{mMOM} (1.116-1.117) [138] получаем, что факторизация РГ β^{mMOM} -функции в ОСК в этом порядке ТВ возможна лишь при выполнении условия

$$\xi^3 + 4\xi^2 + 3\xi = 0, \quad (2.46)$$

где $\xi = \xi^{\text{mMOM}}$. Данное равенство следует из уравнения (2.14), накладывающего ограничения на свойство факторизации, и из того факта, что K_2^{mMOM} -коэффициент также как и в $\overline{\text{MS}}$, и в V-схеме, будет содержать лишь C_F^2 , $C_F C_A$ и $C_F T_F n_f$ цветовые структуры (это следует из явного вида функций D_{mMOM}^{NS} и $C_{Bjp, \text{mMOM}}^{NS}$). Решением (2.46) являются 3 значения калибровочного параметра $\xi = 0, -1, -3$. Таким образом, на трёхпетлевом уровне факторизация β^{mMOM} -функции в ОСК в mMOM-схеме возможна лишь для этих трёх выделенных значений ξ .

Калибровка Ландау $\xi = 0$ часто используется в анализе решёточных и многопетлевых вычислений [25, 134, 136, 138, 143–146, 148, 178]. Её особенность состоит в том, что

перенормированный пропагатор глюона (фотона) в калибровке Ландау всегда поперечен $q_\mu G_{ab}^{\mu\nu}(q) = 0$ (1.100). Помимо этого свойства существует ещё масса, например, при $\xi = 0$ вершина глюон–дух–антидух не перенормируется [135, 147], а лидирующая поправка к аномальной размерности кваркового поля равна нулю [135, 138].

Два других значения $\xi = -1, -3$ менее изучены. Однако, исследования данных калибровок в литературе всё же проводились. К примеру, в работе [129] изучался целый класс МОМ-схем с калибровками $|\xi| \leq 1$, где было показано, что для значений ξ из этого отрезка однопетлевые КХД поправки к эффективным зарядам, определённым через комбинации различных функций Грина (для вершин и пропагаторов), малы при $n_f = 4$. Поскольку калибровку $\xi = 1$ общепринято называть фейнмановской, то калибровку $\xi = -1$ в дальнейшем мы будем именовать антифейнмановской.

Калибровка $\xi = -3$ впервые возникла в [179–181] при изучении двухточечного коррелятора фермионных полей, построенного при помощи контурного интеграла вдоль вильсоновской линии. Позднее её выделенность была независимо обнаружена в работах [182, 183], где, в частности, было показано, что в этой калибровке однопетлевая поправка к константе перенормировки глюонного поля пропорциональна первому коэффициенту КХД β -функции. В литературе калибровка $\xi = 3$ называется калибровкой Йенни и часто применяется, например, при вычислениях поправок на конечный размер ядра и отдачу в расчётах тонкой и сверхтонкой структуры спектра лёгких мюонных атомов [184, 185]. В связи с этим, калибровку $\xi = -3$ будем называть калибровкой анти-Йенни.

Для этих трёх значений ξ получаем [27]:

$$K_{2, \xi=0}^{\text{mMOM}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{2591}{192} + \frac{91}{8}\zeta_3 \right) C_F C_A \quad (2.47)$$

$$+ \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f$$

$$K_{2, \xi=-1}^{\text{mMOM}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{1327}{96} + \frac{47}{4}\zeta_3 \right) C_F C_A \quad (2.48)$$

$$+ \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f$$

$$K_{2, \xi=-3}^{\text{mMOM}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{695}{48} + \frac{25}{2}\zeta_3 \right) C_F C_A \quad (2.49)$$

$$+ \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f.$$

Различие в этих коэффициентах наблюдается только в неабелевых вкладках $C_F C_A$. Кустики, пропорциональные C_F^2 , совпадают в $\overline{\text{MS}}$, V и mMOM-схемах при $\xi = 0, -1, -3$, а пропорциональные $C_F T_F n_f$ равны только в V и mMOM-схемах. Данные особенности будут объяснены нами ниже.

Таким образом, наряду с наиболее часто используемыми калибровками Ландау $\xi = 0$, Фейнмана $\xi = 1$ и Йенни $\xi = 3$, выделенными являются также и их противоположные значения $\xi = -1$ и $\xi = -3$, т.е. наблюдается своеобразная симметрия калибровочных значений относительно $\xi = 0$ (см. Рис. 2.2).

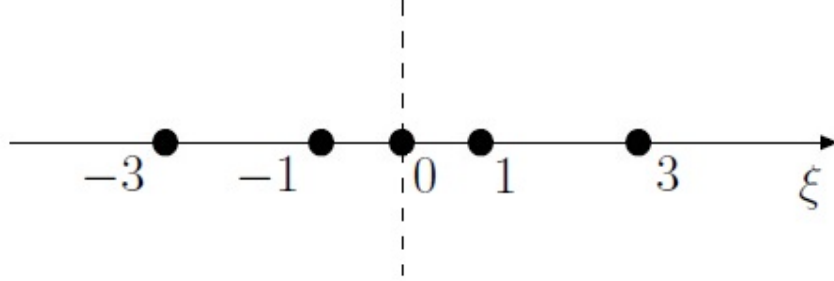


Рис. 2.2: Значения выделенных в КТП калибровок, симметричные относительно $\xi = 0$.

Перейдём к следующему порядку ТВ. Используя четырёхпетлевые выражения для функции Адлера (1.123) и Бьёркена (1.134) в mMOM-схеме, а также трёхпетлевые для β^{mMOM} -функции (1.118), приходим к выводу о том, что факторизация β^{mMOM} -функции в члене, ответственном за нарушение конформной симметрии в ОСК (2.6), выполняется на четырёхпетлевом уровне *только для калибровки Ландау* [27]:

$$\begin{aligned}
K_{3, \xi=0}^{\text{mMOM}} = & \left(\frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7 \right) C_F^3 \\
& + \left(\frac{132421}{4608} + \frac{451}{8}\zeta_3 - \frac{3685}{48}\zeta_5 - \frac{105}{8}\zeta_7 \right) C_F^2 C_A \\
& + \left(-\frac{1840145}{18432} + \frac{152329}{3072}\zeta_3 + \frac{2975}{48}\zeta_5 - \frac{2113}{128}\zeta_3^2 \right) C_F C_A^2 \\
& + \left(\frac{71251}{1152} - \frac{539}{24}\zeta_3 - \frac{125}{3}\zeta_5 + \frac{5}{2}\zeta_3^2 \right) C_F C_A T_F n_f \\
& + \left(-\frac{1273}{144} - \frac{599}{24}\zeta_3 + \frac{75}{2}\zeta_5 \right) C_F^2 T_F n_f + \left(-\frac{49}{6} + \frac{7}{2}\zeta_3 + 5\zeta_5 \right) C_F T_F^2 n_f^2.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

В случае антифейнмановской калибровки или калибровки анти-Йенни наблюдается лишь *частичная* факторизация β^{mMOM} -функции. В самом деле, как видно из (2.11), (2.44), (2.50) аналитическое выражение для K_3 в теории сильных взаимодействий с $SU(N_c)$ группой содержит 6 цветовых структур. В случае $\xi = -1, -3$ только 5 из них могут быть однозначно определены из условия (2.15), а всего лишь один, пропорциональный $C_F C_A T_F n_f$ вкладу, не удовлетворяет этому соотношению. Для более подробной информации см. Приложение В.

Пропорциональный C_F^3 вклад в K_3 одинаков для $\overline{\text{MS}}$ (2.11), V (2.44) и mMOM в калибровке Ландау (2.50). Остальные абелевы слагаемые $C_F^2 T_F n_f$ и $C_F T_F^2 n_f^2$ совпадают только для

V и mMOM-схемы. Данный факт является следствием равенств (1.140), (1.48) и сокращения вкладов рассеяния света на свете в сумме $d_4 + c_4$ (2.15).

После получения данных результатов возникает естественный вопрос — во всех ли калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок калибровки Ландау, анти-Фейнмана и анти-Йенни являются выделенными с точки зрения наличия факторизации двухпетлевой (а в случае $\xi = 0$ и трёхпетлевой) β -функции в ОСК. Ответ на этот вопрос будет дан в следующем разделе.

2.3.3. Метод исследования β -факторизации в ОСК в различных схемах перенормировок: общее доказательство

В этом разделе будем следовать идеям, выдвинутым в работе [27]. Пользуясь ренорминвариантностью величин $D^{NS}(a_s)$ и $C_{Bjp}^{NS}(a_s)$, а также учитывая явный вид конформно-нарушающего члена $\Delta_{csb}(a_s)$ (2.7), мы вправе написать следующее соотношение, которое будет определять значения калибровочного параметра ξ , при которых будет наблюдаться факторизация β^{mMOM} -функции в ОСК:

$$\frac{\beta^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\text{mMOM}}))}{a_s^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\text{mMOM}})} K^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\text{mMOM}})) = \frac{\beta^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}})}{a_s^{\text{mMOM}}} K^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}). \quad (2.51)$$

Без ограничения общности вместо mMOM-схемы в (2.51) мы можем рассматривать *любую другую* из класса схем импульсных вычитаний (обозначим её за **МОМх**). Естественно, приведённые ниже рассуждения будут также справедливыми и для произвольных калибровочно-инвариантных схем перенормировок. В случае выполнения равенства (2.51) можно с уверенностью говорить о наличии факторизации β -функции в ОСК в рассматриваемой, отличной от $\overline{\text{MS}}$, схеме перенормировок.

Используя связь $a_s^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\text{mMOM}})$ (1.108) и соотношение (2.51), находим, что

$$K_1^{\text{mMOM}} = K_1^{\overline{\text{MS}}} \quad (2.52)$$

для любого значения ξ . Данный вывод подтверждается результатами непосредственных вычислений (2.45).

Продолжая эту процедуру в следующем порядке ТВ, получаем

$$K_2^{\text{mMOM}} = K_2^{\overline{\text{MS}}} + \left(\frac{\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{mMOM}}}{\beta_0} + 2b_1^{\text{mMOM}} \right) K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (2.53)$$

где b_1^{mMOM} — однопетлевой коэффициент в (1.108).

Таким образом, вопрос о факторизации двухпетлевой β -функции в ОСК свёлся к вопросу о делимости нацело дроби $(\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{mMOM}})/\beta_0$, т.е. к выполнению равенства

$$\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{mMOM}} = \theta \beta_0 C_A, \quad (2.54)$$

где θ (в случае делимости) должно быть некоторым действительным числом. Принимая во внимание явный вид одно и двухпетлевых коэффициентов β -функции в $\overline{\text{MS}}$ (A.1-A.2) и mMOM-схеме (1.117), приходим к уравнению

$$\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{mMOM}} = \left(\frac{13}{192}\xi + \frac{5}{96}\xi^2 - \frac{1}{64}\xi^3 \right) C_A^2 - \frac{1}{24}(\xi + \xi^2) C_A T_F n_f = \frac{11}{12}\theta C_A^2 - \frac{1}{3}\theta C_A T_F n_f,$$

которое эквивалентно системе

$$\begin{cases} \frac{11}{12}\theta = \frac{13}{192}\xi + \frac{5}{96}\xi^2 - \frac{1}{64}\xi^3, \\ \frac{1}{3}\theta = \frac{1}{24}\xi + \frac{1}{24}\xi^2, \end{cases} \quad (2.55)$$

с решениями $(\xi, \theta) = (0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-3, 3/4)$, которые указывают на то, что факторизация двухпетлевой РГ β^{mMOM} -функции в ОСК возможна лишь для трёх значений $\xi = 0, -1, -3$, которые мы получили в предыдущем разделе из непосредственных вычислений.

Теперь весьма быстрый алгоритм нахождения коэффициентов K_n^{mMOM} (в общем случае в произвольной mMOMx-схеме) в более высоких порядках ТВ становится прозрачным. Без особых трудностей получаем [27]:

$$\begin{aligned} K_3^{\text{mMOM}} = & K_3^{\overline{\text{MS}}} + \left(\frac{\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{mMOM}}}{\beta_0} + 3b_1^{\text{mMOM}} \right) K_2^{\overline{\text{MS}}} + \left(2b_2^{\text{mMOM}} + (b_1^{\text{mMOM}})^2 \right) \\ & + \frac{\beta_2^{\overline{\text{MS}}} - \beta_2^{\text{mMOM}}}{\beta_0} + \frac{(3\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - 2\beta_1^{\text{mMOM}})b_1^{\text{mMOM}}}{\beta_0} + \frac{\beta_1^{\text{mMOM}}(\beta_1^{\text{mMOM}} - \beta_1^{\overline{\text{MS}}})}{\beta_0^2} \Big) K_1^{\overline{\text{MS}}}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

По сравнению с формулой (2.53), выражение для K_3^{mMOM} содержит 3 дополнительные дроби $(\beta_2^{\overline{\text{MS}}} - \beta_2^{\text{mMOM}})/\beta_0$, $(3\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - 2\beta_1^{\text{mMOM}})b_1^{\text{mMOM}}/\beta_0$ и $(\beta_1^{\text{mMOM}}(\beta_1^{\text{mMOM}} - \beta_1^{\overline{\text{MS}}}))/\beta_0^2$. Исследуем их делимость (в сумме или по отдельности) для выделенных на предыдущем этапе значений ξ . Отметим, что в соответствии с решением системы (2.55) последняя дробь $(\beta_1^{\text{mMOM}}(\beta_1^{\text{mMOM}} - \beta_1^{\overline{\text{MS}}}))/\beta_0^2$ тождественно равна нулю для $\xi = 0, -1$. Две другие делятся нацело на β_0 только в сумме и только в калибровке Ландау. При $\xi = -3$ ни одна из дробей не является сократимой ни в сумме, ни по отдельности. Поэтому мы заключаем, что ОСК в виде (2.6) в mMOM-схеме в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении справедливо только для калибровки Ландау.

Интересно применить вышеизложенное описание к каким-нибудь другим калибровочно-неинвариантным схемам перенормировок в КХД и выяснить, при каких значениях ξ возможна факторизация β -функции в ОСК в этих схемах. К сожалению, в представленных на сегодняшний момент результатах для РГ величин (в частности, β -функций), вычисленных в различных калибровочно-неинвариантных схемах, зачастую зависимость от калибровки не удерживается и чаще всего ξ полагается равным нулю [131, 135–137]. Одной из немногих работ, в которой при вычислениях РГ функций параметр ξ не был фиксирован, является статья [186], где рассматривалась довольно экзотическая и существенно более сложная с точки

зрения расчётов схема импульсных вычитаний MOMgggg. Данная схема определяется исходя из условий перенормировки четырёхглюонной вершины посредством вычитаний УФ расходимостей в симметричной точке. В этой работе в рамках MOMgggg-схемы была вычислена β -функция на двухпетлевом уровне с явной зависимостью от калибровки, но не в терминах оператора Казимира, а в терминах количества цветов N_c .

Коэффициент β_1^{MOMgggg} имеет куда более сложный вид, нежели аналогичное выражение для β_1^{mMOM} . В самом деле, помимо того, что калибровочный параметр входит в него уже не в третьей степени, а в четвёртой, β_1^{MOMgggg} содержит ещё и дополнительные трансцендентные логарифмические члены, а также функции Клаузена $\text{Cl}_2(\Theta)$ (а точнее их комбинации $\Phi_1(3/4, 3/4)$, $\Phi_1(9/16, 9/16)$) [186]:

$$\text{Cl}_2(\Theta) = - \int_0^\Theta dx \ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, \quad (2.57)$$

$$\Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) = \sqrt{2} \left[2\text{Cl}_2\left(2 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \text{Cl}_2\left(2 \arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) \right], \quad (2.58)$$

$$\Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}} \left[2\text{Cl}_2\left(2 \arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \text{Cl}_2\left(2 \arccos\left(\frac{1}{9}\right)\right) \right]. \quad (2.59)$$

Численные значения $\Phi_1(3/4, 3/4) \approx 2.832045$, $\Phi_1(9/16, 9/16) \approx 3.403614$.

Рассмотрим частный случай $SU(3)$ -группы. Согласно формуле (2.53) для начала нужно найти такие значения ξ , для которых $(\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{MOMgggg}})/\beta_0$ делится без остатка. Такими значениями будут $\xi = 0$ и $\xi = -3^2$.

В калибровке Ландау $\beta_{1, \xi=0, N_c=3}^{\text{MOMgggg}} = \beta_{1, N_c=3}^{\overline{\text{MS}}}$. Используя результаты [186] для связи a_s^{MOMgggg} с $a_s^{\overline{\text{MS}}}$, формулы из Приложения Б для пересчета на ξ^{MOMgggg} и аналог (2.53), находим

$$\begin{aligned} K_{2, \xi=0, N_c=3}^{\text{MOMgggg}} &= -\frac{280073}{8640} + \frac{3017}{100} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{595}{256} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) - \frac{50533}{51200} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \\ &+ \zeta_3 \left(\frac{15973}{360} - \frac{862}{25} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{85}{32} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{7219}{6400} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \right) \\ &- \frac{80}{3} \zeta_5 + \left[\frac{65}{36} - \frac{49}{24} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{49}{96} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{96} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \right. \\ &\left. + \zeta_3 \left(-\frac{10}{9} + \frac{7}{3} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{7}{12} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{12} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \right) \right] n_f. \end{aligned} \quad (2.60)$$

² Поскольку калибровочный параметр входит в β_1^{MOMgggg} -коэффициент в четвёртой степени, то должно быть 4 значения ξ (действительных или комплексных), для которых рассматриваемая дробь является сократимой (см. mMOM-аналог (2.46), где было кубическое уравнение и, соответственно, 3 корня). Действительно, кроме “хороших” значений $\xi = 0, -3$ существуют два других “плохих”, выражающихся через функции Клаузена и логарифмы. Мы их не рассматриваем, поскольку заранее понятно, что в более высоких порядках ТВ при этих значениях ξ факторизация β^{MOMgggg} -функции в ОСК будет отсутствовать.

В калибровке анти-Йенни

$$\frac{\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_{1, \xi=-3}^{\text{MOMgggg}}}{\beta_0} = -\frac{333}{20} - \frac{3537}{200} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{9}{4} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{33993}{6400} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right), \quad (2.61)$$

т.е. делится без остатка. Коэффициент K_2 равен

$$\begin{aligned} K_{2, \xi=-3, N_c=3}^{\text{MOMgggg}} &= -\frac{9337}{270} + \frac{13769}{400} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{35}{32} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) - \frac{2191}{12800} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \\ &+ \zeta_3 \left(\frac{2108}{45} - \frac{1967}{50} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{5}{4} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{313}{1600} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \right) \\ &- \frac{80}{3} \zeta_5 + \left[\frac{65}{36} - \frac{49}{24} \ln\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{49}{96} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{7}{96} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \right. \\ &\left. + \zeta_3 \left(-\frac{10}{9} + \frac{7}{3} \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{7}{12} \Phi_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{12} \Phi_1\left(\frac{9}{16}, \frac{9}{16}\right) \right) \right] n_f. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Таким образом, в отличие от mMOM-схемы, где факторизация двухпетлевой β -функции в ОСК возможна при $\xi = 0, -1, -3$, в MOMgggg-схеме это справедливо лишь при $\xi = 0, -3$, а антифейнмановская калибровка “выпадает”. Означает ли это, что калибровки $\xi = 0, -3$ будут выделенными во всём классе схем импульсных вычитаний в КХД вне зависимости от выбора перенормируемых вершин и кинематических условий вычитания? Ответ, да. Докажем это.

В любой MOM-подобной схеме перенормировок (MOMx) с линейной ковариантной калибровкой справедливо соотношение (см. (1.115)):

$$\beta^{\text{MOMx}}(a_s^{\text{MOMx}}, \xi^{\text{MOMx}}) = \beta^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}) \frac{\partial a_s^{\text{MOMx}}}{\partial a_s^{\overline{\text{MS}}}} + \xi^{\overline{\text{MS}}} \gamma_\xi^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}, \xi^{\overline{\text{MS}}}) \frac{\partial a_s^{\text{MOMx}}}{\partial \xi^{\overline{\text{MS}}}} \Big|_{\overline{\text{MS}} \rightarrow \text{MOMx}}. \quad (2.63)$$

Соотношение между константами связи в этих двух схемах запишем в следующем виде:

$$a_s^{\overline{\text{MS}}} = a_s^{\text{MOMx}} + \sum_{k=1} b_k (a_s^{\text{MOMx}})^{k+1}. \quad (2.64)$$

Учитывая (2.63), (2.64) и формулы пересчёта из Приложения Б, получаем:

$$\beta_1^{\text{MOMx}} = \beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \xi \gamma_0^{\overline{\text{MS}}}(\xi) \frac{\partial b_1(\xi)}{\partial \xi}, \quad (2.65)$$

где $\xi = \xi^{\text{MOMx}}$ и $\gamma_0^{\overline{\text{MS}}} = (-13/24 + \xi/8)C_A + T_F n_f/3$ — первый схемно-независимый коэффициент аномальной размерности калибровки. Как следует из соотношения (2.53), для того чтобы изучить справедливость свойства факторизации β^{MOMx} -функции в ОСК в $\mathcal{O}(a_s^3)$ приближении нам необходимо исследовать вопрос о делимости $(\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{MOMx}})$ на β_0 без остатка. Из формулы (2.65) непосредственно следует, что при $\xi = 0$ $\beta_1^{\text{MOMx}} = \beta_1^{\overline{\text{MS}}}$, и поэтому в калибровке Ландау всегда будет наблюдаться факторизация двухпетлевой β^{MOMx} -функции в ОСК. Далее, при $\xi = -3$ получаем $\gamma_0 = -\beta_0^3$, а, следовательно, разность $(\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{MOMx}})$ всегда

³ Впервые этот факт был использован в работах [182, 183].

будет делиться нацело на β_0 (см. (2.65)), и обобщённое соотношение Крютера в (2.6) будет выполняться. Остальные значения ξ , при которых возможна факторизация двухпетлевой РГ β -функции, зависят от конкретной схемы перенормировок и определяются членом $\partial b_1/\partial \xi$ в (2.65). Например, для mMOM-схемы таким значением было ещё $\xi = -1$.

В следующем порядке ТВ получаем

$$\begin{aligned} \beta_2^{\text{MOMx}} = & \beta_2^{\overline{\text{MS}}} + \beta_1^{\overline{\text{MS}}} b_1(\xi) + \beta_0 \left(b_1^2(\xi) - b_2(\xi) \right) - \xi \gamma_0^{\overline{\text{MS}}}(\xi) \frac{\partial b_2(\xi)}{\partial \xi} \\ & + \xi \frac{\partial b_1(\xi)}{\partial \xi} \left(\beta_0 \eta_1(\xi) + \gamma_0^{\overline{\text{MS}}}(\xi) b_1(\xi) - \gamma_1^{\overline{\text{MS}}}(\xi) + \xi \gamma_0^{\overline{\text{MS}}}(\xi) \frac{\partial \eta_1(\xi)}{\partial \xi} - \xi \eta_1(\xi) \frac{\partial \gamma_0^{\overline{\text{MS}}}(\xi)}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

где $\gamma_1^{\overline{\text{MS}}}$ — двухпетлевой коэффициент аномальной размерности калибровки [135], а η_k — коэффициенты ряда

$$\xi^{\overline{\text{MS}}} = \xi^{\text{MOMx}} + \xi^{\text{MOMx}} \sum_{k=1} \eta_k (a_s^{\text{MOMx}})^k. \quad (2.67)$$

Поскольку мы выяснили, что уже в частном случае mMOM-схемы трёхпетлевая β -функция факторизуется в ОСК лишь в калибровке Ландау, то в дальнейшем будем рассматривать только эту калибровку. Тогда при $\xi = 0$ имеем

$$\beta_{2, \xi=0}^{\text{MOMx}} = \beta_2^{\overline{\text{MS}}} + \beta_1^{\overline{\text{MS}}} b_1(0) + \beta_0 \left(b_1^2(0) - b_2(0) \right). \quad (2.68)$$

В этом пределе аналог соотношения (2.56) будет иметь следующий вид:

$$K_3^{\text{MOMx}} = K_3^{\overline{\text{MS}}} + 3b_1(0)K_2^{\overline{\text{MS}}} + \left(2b_2(0) + b_1^2(0) + \frac{\beta_2^{\overline{\text{MS}}} - \beta_2^{\text{MOMx}}}{\beta_0} + \frac{\beta_1^{\overline{\text{MS}}} b_1(0)}{\beta_0} \right) K_1^{\overline{\text{MS}}}. \quad (2.69)$$

Подставляя (2.68) в (2.69) находим:

$$K_3^{\text{MOMx}} = K_3^{\overline{\text{MS}}} + 3b_1(0)K_2^{\overline{\text{MS}}} + 3b_2(0)K_1^{\overline{\text{MS}}}. \quad (2.70)$$

Таким образом, мы доказали, что во всех MOM-подобных схемах в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении факторизация β -функции в ОСК будет выполняться в калибровке Ландау.

Отметим также, что поскольку при $\xi = 0$ $\beta_1^{\text{MOMx}} = \beta_1^{\overline{\text{MS}}}$, то в этом случае аналог формулы (2.53) будет иметь следующий вид:

$$K_2^{\text{MOMx}} = K_2^{\overline{\text{MS}}} + 2b_1(0)K_1^{\overline{\text{MS}}}. \quad (2.71)$$

Разработанный здесь метод можно применить на ещё более высокие порядки ТВ. Например,

$$\beta_{3, \xi=0}^{\text{MOMx}} = \beta_3^{\overline{\text{MS}}} + 2\beta_2^{\overline{\text{MS}}} b_1(0) + \beta_1^{\overline{\text{MS}}} b_1^2(0) + 2\beta_0 \left(2b_1(0)b_2(0) - b_1^3(0) - b_3(0) \right), \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \beta_{4, \xi=0}^{\text{MOMx}} = & \beta_4^{\overline{\text{MS}}} + \beta_2^{\overline{\text{MS}}} \left(b_2(0) + 2b_1^2(0) \right) + \beta_1^{\overline{\text{MS}}} \left(3b_1(0)b_2(0) - b_1^3(0) - b_3(0) \right) \\ & + 3\beta_3^{\overline{\text{MS}}} b_1(0) + \beta_0 \left(4b_1^4(0) - 11b_2(0)b_1^2(0) + 6b_3(0)b_1(0) + 4b_2^2(0) - 3b_4(0) \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Подразумевая, что обобщённое соотношение Крютера останется справедливым в $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировок во всех порядках ТВ (как уже говорилось ранее для этого есть теоретические указания [165, 168, 169]), получаем $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ коэффициенты конформно-нарушающего члена при $\xi = 0$:

$$K_4^{\text{MOMx}} = K_4^{\overline{\text{MS}}} + 4b_1(0)K_3^{\overline{\text{MS}}} + \left(4b_2(0) + 2b_1^2(0)\right)K_2^{\overline{\text{MS}}} + 4b_3(0)K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (2.74)$$

$$K_5^{\text{MOMx}} = K_5^{\overline{\text{MS}}} + 5b_1(0)K_4^{\overline{\text{MS}}} + 5\left(b_2(0) + b_1^2(0)\right)K_3^{\overline{\text{MS}}} + 5\left(b_3(0) + b_1(0)b_2(0)\right)K_2^{\overline{\text{MS}}} + 5b_4(0)K_1^{\overline{\text{MS}}}. \quad (2.75)$$

Приведённые соотношения не содержат членов, пропорциональных $1/\beta_0^k$, и могут быть без труда обобщены на случай произвольного порядка ТВ. Данное обстоятельство доказывает, что фундаментальное свойство факторизации β -функции в обобщенном соотношении Крютера будет выполняться в калибровке Ландау также во всех порядках ТВ (при наличии такового в $\overline{\text{MS}}$ -схеме).

Естественно, что аналоги полученных формул (2.51), (2.71), (2.70), (2.74-2.75) могут быть также определены и для класса калибровочно-инвариантных схем, в частности, для V-схемы. В самом деле, исходя из соотношения

$$\frac{\beta^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}})}{a_s^{\overline{\text{MS}}}} K^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}) = \frac{\beta^V(a_{s,V}(a_s^{\overline{\text{MS}}}))}{a_{s,V}(a_s^{\overline{\text{MS}}})} K^V(a_{s,V}(a_s^{\overline{\text{MS}}})), \quad (2.76)$$

а также (1.61), (1.64-1.68), получаем:

$$K_1^V = K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (2.77)$$

$$K_2^V = K_2^{\overline{\text{MS}}} - 2a_1 K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (2.78)$$

$$K_3^V = K_3^{\overline{\text{MS}}} - 3a_1 K_2^{\overline{\text{MS}}} + (6a_1^2 - 3a_2) K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (2.79)$$

$$K_4^V = K_4^{\overline{\text{MS}}} - 4a_1 K_3^{\overline{\text{MS}}} + (10a_1^2 - 4a_2) K_2^{\overline{\text{MS}}} + (20a_1 a_2 - 20a_1^3 - 4a_3) K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (2.80)$$

$$K_5^V = K_5^{\overline{\text{MS}}} - 5a_1 K_4^{\overline{\text{MS}}} + (15a_1^2 - 5a_2) K_3^{\overline{\text{MS}}} + (30a_1 a_2 - 35a_1^3 - 5a_3) K_2^{\overline{\text{MS}}} + (30a_1 a_3 + 15a_2^2 - 105a_1^2 a_2 + 70a_1^4 - 5a_4) K_1^{\overline{\text{MS}}} \dots \quad (2.81)$$

где a_k — коэффициенты разложения $a_{s,V} = a_s^{\overline{\text{MS}}} + \sum_k a_k (a_s^{\overline{\text{MS}}})^{k+1}$ и для V-схемы определяют поправки к статическому кулоновскому потенциалу КХД. Как уже оговаривалось, без ограничения общности в формулах (2.76-2.81) вместо V-схемы можно рассматривать любую другую калибровочно-инвариантную схему перенормировок.

В частности, формулы (2.53), (2.70), (2.78-2.79) непосредственно объясняют независимость лидирующих по степеням C_F вкладов в коэффициентах K_2 и K_3 (см. (2.10), (2.43),

(2.47-2.49) и (2.11), (2.44), (2.50)), а также совпадение их абелевых частей $C_F T_F n_f$, $C_F^2 T_F n_f$ и $C_F T_F^2 n_f^2$ в V и mMOM-схеме.

Более того, формулы (2.53) и (2.56) иллюстрируют причину наличия β -факторизации в ОСК в КЭД. Поскольку схемы перенормировок ($\overline{\text{MS}}$, V , MOM, OS) в КЭД являются калибровочно-инвариантными, то первые два коэффициента β -функций совпадают во всех этих схемах. В соответствии с этим разность двухпетлевых коэффициентов $\beta_{1, QED}$ в этих схемах будет тождественно равна нулю, а оставшиеся ненулевые дроби в КЭД аналоге выражения (2.56) всегда будут делиться нацело на $\beta_{0, QED}$ (третья дробь в нижней строке (2.56) на $\beta_{0, QED}^2$) в силу тождества Уорда, из-за которого все коэффициенты β -функции представляют собой суммы одночленов степеней $k \geq 1$ по количеству заряженных лептонов N (в частности, первый коэффициент $\beta_{0, QED} = N/3$ прямо пропорционален числу заряженных лептонов N).

Итак, к концу этой главы мы пришли к следующим результатам. Факторизация КХД β -функции в ОСК выполняется не только в $\overline{\text{MS}}$ -подобных схемах перенормировок, но и в любых других калибровочно-инвариантных схемах, а также в классе схем импульсных вычитаний в калибровке Ландау по крайней мере в 4-ом порядке ТВ. Если ОСК будет справедливым в $\overline{\text{MS}}$ -схеме во всех порядках ТВ, то оно также будет верно во всех порядках и в любых других калибровочно-инвариантных схемах и MOM-подобных схемах в калибровке Ландау.

В заключение данного раздела сделаем следующее замечание. Как уже упоминалось при рассмотрении трёхточечного коррелятора АВВ токов обобщённое соотношение Крютера, также как и тесно связанная с ним (проявление нарушения одной и той же симметрии) аномалия, возникающая при перенормировке следа тензора энергии-импульса в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, включает в себя факторизованный вклад $\beta(a_s)/a_s$, отражающий эффект нарушения конформной симметрии безмассовой КХД (КЭД). Однако, мы выяснили, что помимо калибровочно-инвариантных схем перенормировок ОСК будет выполняться также и в калибровочно-неинвариантных схемах в калибровке Ландау (предположительно во всех порядках ТВ, как и в $\overline{\text{MS}}$ -схеме). Этот факт может указывать на то, что аномальное соотношение для T_μ^μ (2.16) также может быть справедливым и в классе калибровочно-неинвариантных схем вычитаний УФ расходимостей при $\xi = 0$. Ответ на этот вопрос, возможно, будет получен в ближайшее время после частной беседы с авторами работы [187], проверявшими выполнение равенства (2.16) явными вычислениями на трёхпетлевом уровне в $\overline{\text{MS}}$ -схеме.

Глава 3

Соотношение между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в КХД и его асимптотическая структура

3.1. Введение к главе

Перейдём теперь к изучению соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в рамках пертурбативной КХД, но прежде обсудим связь этого соотношения со статическим потенциалом. Как известно, в эффективной нерелятивистской КХД потенциал взаимодействия тяжёлых кварк–антикварковых пар напрямую связан с массой соответствующего связанного состояния. Например, в низшем порядке теории возмущений для основного состояния боттомония справедливо соотношение $M_{\Upsilon(1S)} = 2M_b + \langle \Upsilon(1S) | V(r) | \Upsilon(1S) \rangle$, где M_b — полюсная масса b -кварка. Поэтому, знание потенциала взаимодействия и теоретических погрешностей его определения важно для нахождения масс тяжёлых кварков. Однако, как было показано в [19, 20, 150, 188] статический потенциал и полюсные массы кварков содержат инфракрасные ренормалонные вклады, которые приводят к факториальному росту коэффициентов в соответствующих рядах ТВ. В самом деле, рассмотрим преобразование Фурье статического потенциала (1.39) в лидирующем по β_0 приближении (см. например [189]):

$$\begin{aligned} V_{\beta_0}(r) &= -4\pi^2 C_F \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{\vec{q}^2} \frac{a_s(\mu^2)}{1 + \beta_0 a_s(\mu^2) \ln(\vec{q}^2/\mu^2)} \\ &= -4\pi^2 C_F a_s(\mu^2) \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{\vec{q}^2} \left(\beta_0 a_s(\mu^2) \ln \left(\frac{\mu^2}{\vec{q}^2} \right) \right)^n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Вместо формул (1.51-1.52) воспользуемся преобразованием Бореля, которое позволяет суммировать ряды ТВ:

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_s^{n+1} = \int_0^{\infty} dt e^{-t/a_s} \mathcal{B}[C](t), \quad (3.2)$$

где $\mathcal{B}[C](t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n / n!$. Используя (3.2), можно получить:

$$\begin{aligned} V_{\beta_0}(r) &= -4\pi^2 C_F \int_0^{\infty} dt e^{-t/a_s} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{\vec{q}^2} \left(\frac{\mu^2}{\vec{q}^2} \right)^{\beta_0 t} \\ &= -4\pi^2 C_F \int_0^{\infty} dt \frac{\mu^{2\beta_0 t} e^{-t/a_s}}{\Gamma(1 + \beta_0 t)} \int_0^{\infty} dz z^{\beta_0 t} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r} - z\vec{q}^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$= -4\pi^2 C_F \int_0^\infty dt \frac{\mu^{2\beta_0 t} e^{-t/a_s}}{\Gamma(1 + \beta_0 t)} \int_0^\infty dz \frac{z^{\beta_0 t - 3/2}}{8\pi^{3/2}} e^{-r^2/4z} = -\frac{C_F \sqrt{\pi}}{r\beta_0} \int_0^\infty du \left(\frac{\mu r}{2}\right)^{2u} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - u)}{\Gamma(1 + u)} e^{-\frac{u}{\beta_0 a_s}},$$

где $u = \beta_0 t$. Ближайший к нулю полюс среди множества $u_k = k + 1/2$ при $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $u = 1/2$ определяет радиус сходимости ряда $\mathcal{B}[V_{\beta_0}](u)$. Возникающая при этом сингулярность эквивалентна расходимости исходного интеграла (3.1) в полюсе $\bar{q}^2 = \Lambda_{QCD}^2$. При больших $n \gg 1$ поведение коэффициентов ряда борелевского образа определяется из разложения вблизи первого лидирующего полюса. Таким образом, имеем при $u \rightarrow 1/2$:

$$\mathcal{B}[V_{\beta_0}](u) \sim -C_F \mu \frac{2}{1 - 2u} = -2C_F \mu \sum_{n=0}^{\infty} (2u)^n = -2C_F \mu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\beta_0)^n n! t^n}{n!}. \quad (3.4)$$

Сравнивая полученный ряд с соответствующим рядом для борелевского образа, находим, что n -ый член в сумме (3.1) для петрурбативного потенциала будет вести себя следующим образом:

$$V_{\beta_0}^{(n)} \stackrel{n \gg 1}{\sim} 2C_F \mu (2\beta_0)^n n!, \quad (3.5)$$

т.е. факториально увеличивается с ростом порядка ТВ. В таком случае говорят, что исследуемый ряд ТВ для статического потенциала является асимптотическим.

Численные значения поправок к статическому кулоновскому потенциалу, вычисленные в аналитическом виде в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в работах [93–97, 100] и представленные в (1.40-1.41), (1.44-1.47), имеют следующий вид для частного случая $SU(3)$ группы:

$$a_1 = \frac{31}{12} - \frac{5}{18} n_f, \quad (3.6)$$

$$a_2 = 28.5468 - 4.147136 n_f + \frac{25}{324} n_f^2, \quad (3.7)$$

$$a_3 = 209.884 - 51.4048 n_f + 2.9061 n_f^2 - \frac{125}{5832} n_f^3. \quad (3.8)$$

Используя нормировочные значения для константы связи, приведённые в разделе 1.4, исследуем, для примера, величины поправок к $V(\bar{q}^2)$ (без учёта древесного вклада) при $n_f = 5$ и $\mu = 10$ ГэВ. Итак,

$$1 + a_1 a_s(\mu^2) + a_2 a_s^2(\mu^2) + a_3 a_s^3(\mu^2) = 1 + 0.05367 + 0.01967 + 0.00207, \quad (3.9)$$

т.е. асимптотический характер всё ещё не проявляется на данном уровне ТВ (впрочем, это видно из Рис. 1.4).

При $n_f = 4$, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{NNLO}}^{(n_f=4)} = 290$ МэВ (с учётом перехода через порог рождения b -кварка) и $\mu = 3$ ГэВ, имеем:

$$1 + a_1 a_s(\mu^2) + a_2 a_s^2(\mu^2) + a_3 a_s^3(\mu^2) = 1 + 0.11436 + 0.07961 + 0.02315. \quad (3.10)$$

Эффект поправок более заметен по сравнению со случаем $n_f = 5$, но ренормалонные факториальные вклады по-прежнему пока ещё не наблюдаются.

Исследование борелевского образа вблизи инфракрасного ренормалонного полюса $u = 1/2$ в лидирующем по β_0 приближении в (3.3) позволяет предсказать не только факториальный рост поправок $n \gg 1$ порядка, но и приводит к знакопеременному по степеням n_f поведению этих поправок, которое проявляется уже с первого порядка ТВ. В самом деле, численные выражения (3.6-3.8) демонстрируют чередование знаков при переходе от вклада, пропорционального n_f^k , к n_f^{k+1} . Данный факт становится понятным при рассмотрении (3.5), куда входит множитель β_0^n , приводящий к такому эффекту.

При учёте следующих за β_0 коэффициентов в (3.1) можно получить асимптотическую формулу для коэффициентов статического потенциала в $\overline{\text{MS}}$ -схеме [150, 188]:

$$V^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi N_V \mu (2\beta_0)^n \frac{\Gamma(n+1+b)}{\Gamma(1+b)} \left(1 + \frac{s_1}{n+b} + \frac{s_2}{(n+b)(n+b-1)} + \frac{s_3}{(n+b)(n+b-1)(n+b-2)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right), \quad (3.11)$$

где $b = \beta_1/(2\beta_0^2)$, а следующие за лидирующей поправки s_k были посчитаны в [22, 23, 150]:

$$s_1 = \frac{1}{4\beta_0^4} (\beta_1^2 - \beta_0\beta_2), \quad (3.12)$$

$$s_2 = \frac{1}{32\beta_0^8} (\beta_1^4 - 2\beta_1^3\beta_0^2 - 2\beta_1^2\beta_2\beta_0 + 4\beta_1\beta_2\beta_0^3 + \beta_2^2\beta_0^2 - 2\beta_3\beta_0^4), \quad (3.13)$$

$$s_3 = \frac{1}{384\beta_0^{12}} (\beta_1^6 - 6\beta_1^5\beta_0^2 + 8\beta_1^4\beta_0^4 - 3\beta_1^4\beta_2\beta_0 + 18\beta_1^3\beta_2\beta_0^3 - 24\beta_1^2\beta_2\beta_0^5 - 6\beta_1^2\beta_3\beta_0^4 - 12\beta_1\beta_2^2\beta_0^4 + 3\beta_1^2\beta_2^2\beta_0^2 + 16\beta_1\beta_3\beta_0^6 - \beta_2^3\beta_0^3 + 8\beta_2^2\beta_0^6 + 6\beta_2\beta_3\beta_0^5 - 8\beta_4\beta_0^7). \quad (3.14)$$

Различные методы определения значений нормировочного фактора N_V в зависимости от количества рассматриваемых ароматов кварков и конечного порядка n теории возмущений представлены в работах [22–24, 190].

Перейдём теперь к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в КХД, борелевский образ которого, также как и ряд ТВ для статического потенциала, содержит ИК ренормалонный полюс $u = 1/2$ [19, 20] (что согласуется с обсуждавшейся в начале этого раздела формулой, связывающей непосредственно измеряемые в экспериментах массы тяжёлых кваркониев с полюсными массами кварков, их составляющими).

Полюсная масса вводится в рамках схемы вычитаний на массовой поверхности (OS) в минковской области энергий, а точнее определяется положением полюса перенормированного пропагатора кварков при условии $p^2 = M_q^2$:

$$\hat{S}_F(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_{0,q} - \Sigma(\hat{p})}, \quad (3.15)$$

$$\left(\hat{p} - m_{0,q} - \Sigma(\hat{p}) \right) \Big|_{p^2=M_q^2} = 0, \quad (3.16)$$

где $\Sigma(\hat{p})$ — одночастично–неприводимый оператор собственной энергии кварка с перенормированной голой массой $m_{0,q}$. Связь голой массы кварка с конечной физической полюсной M_q записывается стандартным образом через константу перенормировки массы в OS-схеме:

$$m_{0,q} = Z_m^{OS} M_q. \quad (3.17)$$

Здесь и ниже мы опускаем зависимость от перенормированной константы сильного взаимодействия $\alpha_{s,0}$ и голого калибровочного параметра ξ_0 . Зависимость от ξ_0 мы не пишем ещё и потому, что она полностью сокращается в многопетлевых вычислениях Z_m^{OS} [191–195]. При расчётах Z_m^{OS} удобно работать не с собственным оператором энергии как таковым, а с его представлением в виде суммы двух независимых слагаемых:

$$\Sigma(\hat{p}) = m_{0,q} \Sigma_1(p^2) + (\hat{p} - m_{0,q}) \Sigma_2(p^2). \quad (3.18)$$

Такое разбиение всегда осуществимо вследствие релятивистской инвариантности оператора $\Sigma(\hat{p})$. При этом Σ_1 и Σ_2 являются скалярными безразмерными функциями, зависящими от квадрата внешнего импульса p^2 . В связи с тем, что в схеме на массовой поверхности разложение в ряд Тейлора производится в точке $p^2 = M_q^2$, для обратного пропагатора кварков можно получить:

$$\begin{aligned} \hat{p} - m_{0,q} - \Sigma(\hat{p}) &= \hat{p} - m_{0,q} - m_{0,q} \left(\Sigma_1(M_q^2) + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_1(p^2) \Big|_{p^2=M_q^2} (p^2 - M_q^2) + \tilde{\Sigma}_1(p^2) \right) - \\ &\quad - (\hat{p} - m_{0,q}) \left(\Sigma_2(M_q^2) + \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_2(p^2) \Big|_{p^2=M_q^2} (p^2 - M_q^2) + \tilde{\Sigma}_2(p^2) \right), \end{aligned}$$

где функции $\tilde{\Sigma}_1(p^2)$ и $\tilde{\Sigma}_2(p^2)$ не содержат расходимостей, а следовательно для них справедливы соотношения:

$$\tilde{\Sigma}_1(M_q^2) = 0, \quad \tilde{\Sigma}_2(M_q^2) = 0.$$

Выбирая параметр M_q таким образом, чтобы выполнялось условие $M_q = m_{0,q}(1 + \Sigma_1(M_q^2))$, видим что полный пропагатор кварков действительно будет иметь полюс в точке $p^2 = M_q^2$ (вследствие выполнения равенства (3.17) множитель $(\hat{p} - m_{0,q})$, стоящий перед функцией $\Sigma_2(p^2)$, можно заменить на $(\hat{p} - M_q)$). Отсюда находим константу перенормировки Z_m^{OS} :

$$Z_m^{OS} = \frac{m_{0,q}}{M_q} = 1 - \Sigma_1(M_q^2). \quad (3.19)$$

Аналогично выражению (3.17) в $\overline{\text{MS}}$ -схеме можно также ввести бегущую массу $\overline{m}_q(\mu^2)$, зависящую от масштаба μ^2 , и соответствующую константу перенормировки, связывающую

голую и перенормированную массы тяжёлых кварков:

$$m_{0,q} = Z_m^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2) \overline{m}_q(\mu^2). \quad (3.20)$$

Бег массы $\overline{m}_q(\mu^2)$ с изменением масштаба μ^2 определяется из соотношения

$$\frac{\overline{m}_q(\tilde{\mu}^2)}{\overline{m}_q(\mu^2)} = \exp\left(\int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(\tilde{\mu}^2)} \frac{\gamma_m(x) dx}{\beta(x)}\right), \quad (3.21)$$

где $\beta(a_s)$ -функция в $\overline{\text{MS}}$ -схеме представлена в Приложении A и (1.17). Аномальная размерность массы $\gamma_m(a_s)$ равна:

$$\gamma_m(a_s) = \mu^2 \frac{\partial \ln(\overline{m}_q(\mu^2))}{\partial \mu^2} = -\mu^2 \frac{\partial \ln\left(Z_m^{\overline{\text{MS}}}(a_s(\mu^2))\right)}{\partial \mu^2} = -\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i a_s^{i+1}. \quad (3.22)$$

После того, как мы ввели все необходимые для этой главы физические величины, рассмотрим отношение:

$$t_m^M(\mu^2/M_q^2) = \frac{M_q}{\overline{m}_q(\mu^2)} = \frac{Z_m^{\overline{\text{MS}}}(a_s(\mu^2))}{Z_m^{\text{OS}}(\mu^2/M_q^2, a_s(\mu^2))} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M(\mu^2/M_q^2) a_s^k(\mu^2). \quad (3.23)$$

Индекс M в (3.23) соответствует определению данного соотношения в минковской времениподобной области энергий. Из-за того, что перенормированные массы $\overline{m}_q(\mu^2)$ и M_q являются конечными, следует, что введённое отношение $t_m^M(\mu^2/M_q^2)$ также не должно содержать никаких УФ расходимостей. Однако, для этого необходимо представить все массовые ренормализационные константы через одну перенормированную константу связи сильного взаимодействия. В данной работе таковой является $a_s(\mu^2)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме. Найдём разложение голой константы $a_{s,0}$ через $a_s(\mu^2)$. Для того чтобы сохранялась правильная размерность констант связи в рамках размерной регуляризации необходимо, чтобы выполнялось условие:

$$a_{s,0} = \mu^{2\varepsilon} Z_\alpha^{\overline{\text{MS}}}(a_s(\mu^2)) a_s(\mu^2). \quad (3.24)$$

Используя экспоненциальное представление константы перенормировки заряда $Z_\alpha^{\overline{\text{MS}}} = \exp(\tilde{Z}_\alpha^{\overline{\text{MS}}})$ через пока ещё неизвестную функцию $\tilde{Z}_\alpha^{\overline{\text{MS}}}$, соотношение $\beta(a_s(\mu^2)) = -\varepsilon a_s(\mu^2) + \sum_{i=0} \beta_i a_s^{i+2}(\mu^2)$, уравнение (3.24) и условие независимости голой константы связи от масштабного фактора $\partial a_{s,0}(\mu^2)/\partial \ln \mu^2 = 0$, получаем следующее дифференциальное уравнение на неизвестную функцию $\tilde{Z}_\alpha^{\overline{\text{MS}}}$:

$$\left(\beta(a_s) - \varepsilon a_s\right) \frac{\partial \tilde{Z}_\alpha^{\overline{\text{MS}}}}{\partial a_s} = -\frac{\beta(a_s)}{a_s},$$

откуда находим

$$\tilde{Z}_\alpha^{\overline{\text{MS}}}(a_s) = - \int_0^{a_s} \frac{dx}{x} \frac{\beta(x)}{\beta(x) - \varepsilon x}.$$

Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} a_{s,0} &= \mu^{2\varepsilon} a_s(\mu^2) \exp \left(- \int_0^{a_s} \frac{dx}{x} \frac{\beta(x)}{\beta(x) - \varepsilon x} \right) \\ &= \mu^{2\varepsilon} a_s(\mu^2) \left(1 - \frac{\beta_0}{\varepsilon} a_s(\mu^2) + \left(\frac{\beta_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{\beta_1}{2\varepsilon} \right) a_s^2(\mu^2) - \left(\frac{\beta_0^3}{\varepsilon^3} - \frac{7\beta_1\beta_0}{6\varepsilon^2} + \frac{\beta_2}{3\varepsilon} \right) a_s^3(\mu^2) \right) + \mathcal{O}(a_s^5) \end{aligned}$$

Подставляя полученное выражение для голой константы связи в выражения для $Z_m^{\overline{\text{MS}}}$ и Z_m^{OS} , вычисленные в терминах перенормированной константы связи, можно убедиться в том, что отношение $t_m^M(\mu^2/M_q^2)$ является конечным и независимым от калибровки. Отметим, что из-за появления масштабного фактора, обеспечивающего правильную размерность в (3.24), в виде $\mu^{2\varepsilon}$ и множителя $M_q^{-2\varepsilon}$, возникающего в OS-схеме, члены $t_m^M(\mu^2/M_q^2)$ будут содержать характерные логарифмы $L = \ln(\mu^2/M_q^2)$, которые исчезают при $\mu^2 = M_q^2$. Однако, в нашем дальнейшем изложении мы будем использовать нормировку $\mu^2 = \bar{m}_q^2$, которая получается из предыдущей решением соответствующих РГ уравнений, представленных в Приложении А. В этом случае масса соответствующего кварка может быть найдена геометрически как точка пересечения бегущей логарифмически зависимой от масштабного фактора массы $\bar{m}_q^2(\mu^2)$ с биссектрисой угла первого квадранта. Далее коэффициенты t_k^M в (3.23), нормированные на масштабе $\mu^2 = \bar{m}_q^2$, мы будем обозначать просто как t_k^M , т.е.

$$\frac{M_q}{\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M a_s^k(\bar{m}_q^2). \quad (3.25)$$

Первый член t_1^M в (3.25) был посчитан долгое время назад в [196]. Двухпетлевой коэффициент t_2^M был аналитически вычислен в [191] и позже подтвержден в работах [192, 193]. Поправка t_3^M была получена в [194] в аналитическом виде для произвольной группы $SU(N_c)$ и в работе [195] с помощью комбинаций различных полуаналитических методов.

Здесь и далее нам будет удобно рассматривать приближение, в котором есть один тяжёлый кварк (и перенормируется его масса) и n_l безмассовых (в петлях), т.е. $n_l = n_f - 1$. Влияние поправок, связанных с учётом масс виртуальных частиц, было изучено в работах [191, 197]. Они не играют определяющей роли при изучении *асимптотического* поведения рядов ТВ для $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношения, также как и, например, эффекты электрослабых поправок (см. [198]). В связи с этим в данной работе мы не будем их рассматривать.

Коэффициент t_k^M любого порядка ТВ является полиномом степени $(k-1)$ по n_l :

$$t_k^M = \sum_{i=0}^{k-1} t_{k,i}^M n_l^i. \quad (3.26)$$

Рассмотрим более подробно поправку четвёртого порядка:

$$t_4^M = t_{4,3}^M n_l^3 + t_{4,2}^M n_l^2 + t_{4,1}^M n_l + t_{4,0}^M. \quad (3.27)$$

В этом разложении первые два коэффициента $t_{4,3}^M$ и $t_{4,2}^M$ были вычислены в аналитическом виде в работе [199]. Стоит отметить, что численные значения лидирующих по степеням n_l вкладов в (3.26) были получены намного раньше вплоть до 9 порядка ТВ в [21] из рассмотрения ренормальной цепочки кварковых петель, вставленной в глюонную линию, перенормирующую пропагатор тяжёлых кварков. Последние два члена в (3.27) пока ещё неизвестны в аналитической форме.

Однако, в работе [200] были получены численные значения поправки t_4^M с независимой от количества ароматов погрешностью при фиксированном количестве $n_l = 3, 4, 5$. Данный факт свидетельствует о том, что основная погрешность вычислений определяется ошибкой константного члена $t_{4,0}^M$, полученного из рассмотрения диаграмм без вставок фермионных петель. Например, в случае t -кварка ошибка полуаналитических вычислений [200] составила порядка $\sim 2.6\%$. Используя результаты данных расчётов, в работе [26] впервые был применён математический метод наименьших квадратов (МНК) (см. например [201, 202], где также описан модифицированный МНК с весовыми множителями [203]) для нахождения численных значений коэффициентов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$. Этот метод позволяет приближённо решать переопределённые системы алгебраических уравнений (в данном случае трёх уравнений, соответствующих значениям $n_l = 3, 4, 5$, с двумя неизвестными) и фиксировать ошибки полученных решений. Результаты применения МНК, представленные в [26], равны:

$$t_{4,0}^M(\overline{m}_q^2) = 3556.4 \pm 62.0, \quad t_{4,1}^M(\overline{m}_q^2) = -745.83 \pm 15.20. \quad (3.28)$$

В силу малого количества рассмотренных уравнений, МНК-ошибки оказались значительными, но не превышающими 2% от центральных значений $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ коэффициентов. Полученные в [26]¹ результаты находятся в хорошем согласии с расчётами, выполненными в [204] при помощи специальной процедуры фитирования, использующей теоретические предположения о *large* β_0 -представлении. Метод же наименьших квадратов напротив — является строго математическим, не требующим дополнительных физических предположений.

Результаты аналитических и численных расчётов коэффициентов t_k^M в (3.25) указывают на то, что асимптотическая структура $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношения для s -кварка проявляется уже с третьего (или даже со второго) порядка ТВ, а для b -кварка, вероятнее всего, с четырёхпетлевого уровня. Для однозначного ответа на вопрос о номере порядка ТВ, начиная с которого

¹ В этой работе также впервые была представлена явная зависимость соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков от количества ароматов и от масштаба на четырёхпетлевом уровне.

пертурбативные поправки к полюсной массе b -кварка начнут увеличиваться, мы исследуем различные процедуры оценки пяти и шестипетлевых вкладов в рассматриваемое соотношение. Для t -кварка в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении асимптотический характер всё ещё не проявляется.

Данное асимптотическое поведение объясняется вкладом лидирующего ИК ренормального полюса $u = 1/2$ в борелевский образ $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношения [19, 20]. Полюсная масса, в отличие от бегущей, определённой в рамках $\overline{\text{MS}}$ -схемы УФ вычитаний, чувствительна к вкладам малых импульсов, хотя и является ИК конечной величиной. Ренормальный анализ для соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков приводит к следующей асимптотической формуле [22, 150, 188, 205], аналогичной соотношению (3.11):

$$t_k^{M, r-n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi N_m (2\beta_0)^{k-1} \frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(1+b)} \left(1 + \frac{s_1}{k+b-1} + \frac{s_2}{(k+b-1)(k+b-2)} + \frac{s_3}{(k+b-1)(k+b-2)(k+b-3)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) \right), \quad (3.29)$$

где поправки s_k приведены в (3.12-3.14), а нормировочный фактор N_m по своему смыслу полностью аналогичен N_V в (3.11).

Интересный способ получения формулы (3.29) был указан в [206]. Исходя из того факта, что лидирующий ренормальный вклад в $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношение не зависит от \overline{m}_q [205], следует требование $dM_q/d\overline{m}_q(\overline{m}_q^2) \simeq 1$, которое наряду с истинной производной

$$\frac{dM_q}{d\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)} = 1 + t^M + 2\beta(a_s) \frac{\partial t^M}{\partial a_s}, \quad (3.30)$$

полученной из (3.25) (здесь $t^M = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M a_s^k(\overline{m}_q^2)$), приводит к рекуррентному соотношению

$$t_k^M \simeq 2 \left(\beta_0(k-1)t_{k-1}^M + \beta_1(k-2)t_{k-2}^M + \cdots + \beta_{k-2}t_1^M \right), \quad (3.31)$$

воспроизводящему лишь лидирующие асимптотические вклады в коэффициенты t_k^M .

Решение уравнения (3.31) совпадает с асимптотической формулой (3.29). Стоит упомянуть также, что асимптотически расходящиеся ряды ТВ характерны не только для квантовой теории поля, но и для квантовой механики. Действительно, например, ряд ТВ для собственной энергии ангармонического осциллятора с потенциальной энергией $U(x) = m\omega^2 x^2/2 + \lambda x^4/4$ не является сходящимся для любого $\lambda \neq 0$ [207].

В заключение этого раздела отметим, что из-за совпадения лидирующих ИК ренормальных сингулярностей у борелевского образа статического потенциала и $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношения оказывается возможным введение понятия массы тяжёлого кварка, не содержащей эффектов данных расходимостей. Подобную массу в литературе принято называть PS-массой,

определённой в рамках *Potential subtraction* схемы [188]. Ограничение области интегрирования в преобразовании Фурье для потенциала позволяет избавиться от ИК ренормалонных эффектов:

$$V(r, \mu_f) = V(r) + 2\delta m_q(\mu_f), \quad (3.32)$$

где μ_f — масштаб обрезания, $\delta m_q(\mu_f)$ определяется из соотношения:

$$\delta m_q(\mu_f) = -\frac{1}{2} \int_{|\vec{q}| < \mu_f} \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} V(\vec{q}^2). \quad (3.33)$$

Здесь $V(r, \mu_f)$ в (3.32) есть свободный от инфракрасных ренормалонных вкладов PS-потенциал, а экспоненту в (3.33) полагают равной $\exp(i\vec{q}\vec{r}) \approx 1$. Масштаб μ_f обычно определяется из условия $\mu_f \sim 1/r \sim M_q v \sim M_q \alpha_s(M_q)$, где v обозначает сравнительно небольшую относительную скорость двух кварков в их центре масс. При этом теория возмущений требует наложения условия $\mu_f > \Lambda_{QCD}$. В таком случае величина

$$m_{\text{PS},q}(\mu_f) = M_q - \delta m_q(\mu_f) \quad (3.34)$$

не будет содержать инфракрасных ренормалонных вкладов [188]. Зная соотношение между полюсной массой и бегущей, можно, используя (3.34), найти связь с PS-массой, а следовательно с потенциалом и его высшими поправками. Изучим вопрос об исследовании соотношения между полюсной и бегущей массами кварков более подробно в следующих разделах.

3.2. Применение метода наименьших квадратов

В связи с появлением новых вычислений коэффициента t_4^M (3.27) в работе [208], выполненных, по сравнению с предыдущими расчётами [200], для гораздо большего количества ароматов $0 \leq n_l \leq 20$ и с намного большей точностью, мы обновим наши результаты по определению членов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ (см. (3.28)), представленные ранее в [26] и полученные по трём точкам $n_l = 3, 4, 5$ при помощи метода наименьших квадратов. При этом мы ограничимся рассмотрением “физически–мотивированных” значений безмассовых ароматов кварков из интервала $3 \leq n_l \leq 15$. Нижняя граница соответствует анализу поведения $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношения для действительно *тяжёлых* кварков, а верхняя следует из условия отсутствия нарушения свойства асимптотической свободы КХД, т.е. $\beta_0 > 0$ (см. (A.1)), а следовательно $n_l < 31/2$.

Следуя работе [29] и используя результаты полуаналитических вычислений [208], мы получаем следующую переопределённую систему уравнений для двух неизвестных коэффи-

циентов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ в разложении (3.27):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \\ 1 & 13 \\ 1 & 14 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{4,0}^M \\ t_{4,1}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1330.44 \pm 1.74 \\ 584.72 \pm 1.77 \\ -160.99 \pm 1.80 \\ -906.72 \pm 1.84 \\ -1652.44 \pm 1.87 \\ -2398.16 \pm 1.91 \\ -3143.88 \pm 1.94 \\ -3889.61 \pm 1.98 \\ -4635.32 \pm 2.01 \\ -5381.04 \pm 2.05 \\ -6126.77 \pm 2.08 \\ -6872.49 \pm 2.12 \\ -7618.21 \pm 2.16 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Для приближённого решения переопределённой системы (3.35) алгебраических уравнений мы используем метод наименьших квадратов (МНК). Для этого вводим функцию $\Phi(t_{4,0}^M, t_{4,1}^M)$, равную сумме квадратов отклонений (невязок) всех уравнений рассматриваемой системы:

$$\Phi(t_{4,0}^M, t_{4,1}^M) = \sum_{s=1}^{13} (t_{4,0}^M + t_{4,1}^M n_{l_s} - y_{l_s})^2, \quad (3.36)$$

где индекс s пробегает все значения, равные количеству уравнений в (3.35), y_{l_s} — числа, представленные в столбце свободных членов с их теоретическими погрешностями Δy_{l_s} , фиксированными в [208].

Под решениями системы (3.35) мы понимаем такие значения $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$, при которых функция $\Phi(t_{4,0}^M, t_{4,1}^M)$ достигает своего минимума, определённого из условий:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_{4,0}^M} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_{4,1}^M} = 0. \quad (3.37)$$

Эти требования приводят к системе двух уравнений с симметрической положительно-определённой матрицей (а следовательно, решение существует и единственно):

$$\begin{cases} t_{4,0}^M \sum_{s=1}^{13} 1 + t_{4,1}^M \sum_{s=1}^{13} n_{l_s} = \sum_{s=1}^{13} y_{l_s}, \\ t_{4,0}^M \sum_{s=1}^{13} n_{l_s} + t_{4,1}^M \sum_{s=1}^{13} n_{l_s}^2 = \sum_{s=1}^{13} n_{l_s} y_{l_s}. \end{cases} \quad (3.38)$$

Погрешности полученных таким образом МНК-решений могут быть найдены при помощи закона накопления ошибок:

$$\Delta t_{4,0}^M = \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \left(\frac{\partial t_{4,0}^M}{\partial y_{l_s}} \Delta y_{l_s} \right)^2} = \frac{1}{13 \sum_{s=1}^{13} n_{l_s}^2 - \left(\sum_{s=1}^{13} n_{l_s} \right)^2} \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \Delta y_{l_s}^2 \left(\sum_{i=1}^{13} n_{l_i}^2 - n_{l_s} \sum_{i=1}^{13} n_{l_i} \right)^2}, \quad (3.39)$$

$$\Delta t_{4,1}^M = \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \left(\frac{\partial t_{4,1}^M}{\partial y_{l_s}} \Delta y_{l_s} \right)^2} = \frac{1}{13 \sum_{s=1}^{13} n_{l_s}^2 - \left(\sum_{s=1}^{13} n_{l_s} \right)^2} \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \Delta y_{l_s}^2 \left(13 n_{l_s} - \sum_{i=1}^{13} n_{l_i} \right)^2}. \quad (3.40)$$

Комбинирование решений системы (3.38) и погрешностей (3.39-3.40) даёт следующий результат:

$$t_{4,0}^M(\overline{m}_q^2) = 3567.61 \pm 1.34, \quad t_{4,1}^M(\overline{m}_q^2) = -745.72 \pm 0.15. \quad (3.41)$$

Условия (3.37) для решения системы (3.35) можно интерпретировать следующим образом: по данным 13 точкам на плоскости в координатах $y_l(n_l)$ необходимо оптимальным образом (так чтобы сумма квадратов в (3.36) была как можно меньше) построить прямую. При этом коэффициенты $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ определяют положение и угол наклона этой прямой с осью n_l . Поэтому ясно, что погрешности, содержащиеся в y_{l_s} , будут влиять на эти параметры прямой. Но отсюда не следует, что ошибки их определения не могут быть меньше или больше погрешности отдельно взятой точки.

МНК-решения (3.41) следует сравнить с аналогичными выражениями, полученными в работе [208]:

$$t_{4,0}^M(\overline{m}_q^2) = 3567.60 \pm 1.64, \quad t_{4,1}^M(\overline{m}_q^2) = -745.721 \pm 0.040, \quad (3.42)$$

где, однако, коэффициент $t_{4,0}^M(\overline{m}_q^2)$ фиксировался как значение поправки t_4^M при $n_l = 0$, а влияние остальных коэффициентов при ненулевых n_l не учитывалось. Полученные нами выражения для $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ не основываются на значении этого “нефизического” коэффициента, поскольку мы рассматриваем интервал $3 \leq n_l \leq 15$. Несмотря на это, центральные значения (3.41) и (3.42) практически совпадают. Более того, как показано в работе [29] (см. Приложение Г) МНК-решения устойчивы как по отношению к количеству уравнений начальной системы (3.35) (даже ограничиваясь тремя уравнениями при $3 \leq n_l \leq 5$, центральные значения МНК-решений почти не изменяются по сравнению с (3.41); однако, погрешности соответствующих решений увеличиваются примерно в 5 раз), так и по отношению к количеству неизвестных в (3.27) (полагая все 4 коэффициента $t_{4,0}^M - t_{4,3}^M$ неизвестными мы всё равно воспроизведём результат (3.41), правда МНК-погрешности этих значений увеличатся ещё сильнее — примерно в 10 раз). Таким образом, показана эффективность и надёжность метода наименьших квадратов.

В конце этого параграфа отметим, что представленные ранее в [26] менее точные значения коэффициентов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ (3.28), найденные при помощи МНК и основанные на результатах расчёта поправок t_4^M при фиксированном числе $n_l = 3, 4, 5$ [200] с гораздо большими погрешностями, нежели приведёнными в (3.35), полностью согласуются с обновлёнными результатами (3.41) и (3.42). Что лишний раз подтверждает обоснованность применения МНК к задаче нахождения двух неизвестных в аналитическом виде коэффициентов в разложении поправки 4-го порядка ТВ к $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношению по степеням количества ароматов безмассовых кварков.

3.3. Применение процедуры эффективных зарядов и $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношение

Как уже упоминалось, полюсная масса M_q определяется в рамках схемы вычитаний на массовой поверхности при $p^2 = M_q^2$ в минковской области. Соответствующее значение константы перенормировки Z_m^{OS} содержит типичные для OS-схемы вклады, пропорциональные степеням π^2 . В свою очередь, в константе $Z_m^{\overline{MS}}$ появление первых π^2 -эффектов, а точнее члена π^4 , происходит лишь начиная с четвёртого порядка ТВ. В интересующем нас случае $SU(3)$ группы коэффициенты соотношений (3.25-3.26) имеют следующий вид [191, 194, 196, 199]:

$$t_{1,0}^M = \frac{4}{3}, \quad (3.43)$$

$$t_{2,1}^M = -\frac{71}{144} - \frac{\pi^2}{18}, \quad (3.44)$$

$$t_{2,0}^M = \frac{307}{32} - \frac{\zeta_3}{6} + \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2 \ln 2}{9}, \quad (3.45)$$

$$t_{3,2}^M = \frac{2353}{23328} + \frac{7}{54}\zeta_3 + \frac{13}{324}\pi^2, \quad (3.46)$$

$$t_{3,1}^M = -\frac{231847}{23328} - \frac{241}{72}\zeta_3 + \frac{\ln^4 2}{81} + \frac{8}{27}\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{61}{1944}\pi^4 - \pi^2 \left[\frac{991}{648} + \frac{11}{81} \ln 2 - \frac{2}{81} \ln^2 2 \right], \quad (3.47)$$

$$t_{3,0}^M = \frac{8481925}{93312} + \frac{58}{27}\zeta_3 + \frac{1975}{216}\zeta_5 - \frac{55}{162} \ln^4 2 - \frac{220}{27}\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{695}{7776}\pi^4 + \pi^2 \left[\frac{652841}{38880} - \frac{1439}{432}\zeta_3 - \frac{575}{162} \ln 2 - \frac{22}{81} \ln^2 2 \right], \quad (3.48)$$

$$t_{4,3}^M = -\frac{42979}{1119744} - \frac{317}{2592}\zeta_3 - \frac{71}{25920}\pi^4 - \frac{89}{3888}\pi^2, \quad (3.49)$$

$$t_{4,2}^M = \frac{30575329}{4478976} + \frac{40979}{5184}\zeta_3 - \frac{241}{216}\zeta_5 - \frac{11}{486} \ln^4 2 + \frac{\ln^5 2}{405} - \frac{44}{81}\text{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{8}{27}\text{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + \pi^4 \left[\frac{32293}{466560} + \frac{31}{9720} \ln 2 \right] + \pi^2 \left[\frac{6979}{3456} + \frac{5}{48}\zeta_3 + \frac{103}{972} \ln 2 - \frac{11}{243} \ln^2 2 + \frac{2}{243} \ln^3 2 \right]. \quad (3.50)$$

Как следствие вычисления в минковской OS-схеме, коэффициенты $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношения

содержат типичные π^2 -вклады, начиная со 2-го порядка ТВ, а члены, пропорциональные π^4 — начиная с трёхпетлевого уровня. Появление слагаемых, пропорциональных π^6 , ожидается в ещё невычисленных в аналитическом виде коэффициентах $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ (см. предыдущий раздел). Сравнивая аналитическую структуру данного соотношения с аномальной размерностью массы в КХД (3.22), вычисленной на одно, двух, трёх и четырёхпетлевом уровне ТВ соответственно в работах [50, 51], [196, 209], [210, 211], [212, 213], можно заключить, что только π^4 -вклады, входящие в $t_{4,2}^M$ и $t_{4,1}^M$ -коэффициенты, могут содержать примесь ζ_4 -членов, впервые появляющихся в n_l и n_l^2 -зависимых $\mathcal{O}(a_s^4)$ поправках к $\gamma_m(a_s)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме.

Для качественного изучения асимптотической структуры соотношения между полюсными и бегущими массами b и t -кварков получим оценки поправок 5 и 6 порядков ТВ с помощью различных теоретических методов. В первом из них, основывающемся на процедуре эффективных зарядов, мы будем моделировать появление вышеупомянутых OS π^2 -вкладов при помощи “кинематических” π^2 -членов, связанных с эффектами аналитического продолжения из евклидовой области энергий в минковскую. Обоснованность такого предположения будет показана нами ниже.

Следуя работе [214] мы рассмотрим дисперсионное соотношение типа Челлена–Лемана (аналог соотношения (1.16) между функцией Адлера $D(Q^2)$ и $R(s)$ -отношением) для евклидовой функции $F(Q^2)$ с $Q^2 \geq 0$

$$F(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty ds \frac{T(s)}{(s + Q^2)^2} + \text{вычитания}, \quad (3.51)$$

связанной с модельной спектральной функцией $T(s)$, определённой в минковской области²:

$$T(s) = \overline{m}_q(s) \left(1 + \sum_{k=1}^\infty t_k a_s^k(s) \right). \quad (3.52)$$

Одна из основных идей работы [214] состоит в том, что при $s = \overline{m}_q^2$ коэффициенты t_k функции $T(s)$ в (3.52) полагаются равными соответствующим коэффициентам t_k^M в $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношении (3.25). С точки зрения корректного определения дисперсионное соотношение (3.51) представляется не вполне обоснованным и из-за неопределённой константы вычитаний содержит теоретические неоднозначности в области низких энергий³, обсуждавшиеся в [149, 216], а также в [217] при рассмотрении функции Грина скалярных кварковых

² Которая, по всей видимости, может быть выражена через мнимую часть собственно-энергетической функции кварков по аналогии, например, с работой [215], где излагается теория дисперсионных соотношений и аналитические свойства корреляционных функций.

³ В связи с этим корректнее было бы рассматривать дисперсионное соотношение с вычитанием $F(Q^2) - F(0)$. Данное утверждение в настоящее время находится в процессе изучения.

токов $\bar{\psi}_q \psi_q$. Ниже мы покажем, что оценки к $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$, полученные с помощью (3.51), не противоречат результатам других независимых приближённых методов.

В дальнейшем мы будем использовать модель, в которой евклидова функция $F(Q^2)$ представима в виде следующего ряда ТВ:

$$F(Q^2) = \bar{m}_q(Q^2) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^E a_s^k(Q^2) \right). \quad (3.53)$$

Используя теперь обратное интегральное представление для функции $T(s)$ и соотношения (3.51-3.52), можно получить приближённое спектральное представление для полюсной и бегущей в $\overline{\text{MS}}$ -схеме массы тяжёлых кварков:

$$M_q \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{-\bar{m}_q(\bar{m}_q^2) - i\epsilon}^{-\bar{m}_q(\bar{m}_q^2) + i\epsilon} ds' \int_0^{\infty} \frac{\bar{m}_q(s) (1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M a_s^k(s))}{(s + s')^2} ds. \quad (3.54)$$

Учитывая бег константы связи $a_s(s)$ и массы $\bar{m}_q(s)$ на шестипетлевом уровне (см. Приложение А), а также соотношения (3.51-3.53), мы можем найти связь коэффициентов t_k^M и f_k^E , определённых для соответствующих минковских и евклидовых физических величин. Возникающие при этом в (3.51) интегралы могут быть вычислены с помощью теоремы Коши о вычетах:

$$Q^2 \int_0^{\infty} ds \frac{\{1; l; l^2; l^3; l^4; l^5; l^6\}}{(s + Q^2)^2} = \left\{ 1; \mathfrak{L}; \mathfrak{L}^2 + \frac{\pi^2}{3}; \mathfrak{L}^3 + \pi^2 \mathfrak{L}; \mathfrak{L}^4 + 2\pi^2 \mathfrak{L}^2 + \frac{7\pi^4}{15}; \right. \\ \left. \mathfrak{L}^5 + \frac{10}{3}\pi^2 \mathfrak{L}^3 + \frac{7}{3}\pi^4 \mathfrak{L}; \mathfrak{L}^6 + 5\pi^2 \mathfrak{L}^4 + 7\pi^4 \mathfrak{L}^2 + \frac{31}{21}\pi^6 \right\}, \quad (3.55)$$

где $l = \ln(\mu^2/s)$ и $\mathfrak{L} = \ln(\mu^2/Q^2)$.

Затем, полагая $\mu^2 = Q^2$, получаем соотношение

$$t_k^M = f_k^E - \Delta_k, \quad (3.56)$$

где дополнительные слагаемые Δ_k отражают влияние эффектов аналитического продолжения, пропорциональных степеням π^2 (как это видно из (3.55)). Их явный вид может быть представлен следующим образом:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\pi^2}{6} \gamma_0 (\beta_0 + \gamma_0), \quad (3.57)$$

$$\Delta_3 = \frac{\pi^2}{3} \left[f_1^E (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 \right) + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_0 + \gamma_1 \beta_0 + \gamma_1 \gamma_0 \right], \quad (3.58)$$

$$\Delta_4 = \frac{\pi^2}{3} \left[(f_2^E - \Delta_2) \left(3\beta_0^2 + \frac{5}{2} \beta_0 \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_0^2 \right) + f_1^E \left(\frac{3}{2} \beta_1 \gamma_0 + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 + 2\gamma_1 \beta_0 + \gamma_1 \gamma_0 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_0 + \gamma_1 \beta_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \frac{3}{2} \gamma_2 \beta_0 + \gamma_2 \gamma_0 \right] + \frac{7\pi^4}{60} \gamma_0 (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{3} \gamma_0 \right), \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \Delta_5 = & \frac{\pi^2}{3} \left[(f_3^E - \Delta_3) \left(6\beta_0^2 + \frac{7}{2}\beta_0\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_0^2 \right) + (f_2^E - \Delta_2) \left(7\beta_1\beta_0 + 3\gamma_1\beta_0 + \frac{5}{2}\beta_1\gamma_0 + \gamma_1\gamma_0 \right) \right. \\ & + f_1^E \left(\frac{3}{2}\beta_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^2 + 3\beta_2\beta_0 + \frac{5}{2}\gamma_2\beta_0 + 2\beta_1\gamma_1 + \frac{3}{2}\beta_2\gamma_0 + \gamma_2\gamma_0 \right) + \frac{1}{2}\beta_3\gamma_0 + \beta_2\gamma_1 \\ & \left. + \frac{3}{2}\gamma_2\beta_1 + 2\gamma_3\beta_0 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_0\gamma_3 \right] + \frac{7\pi^4}{15} \left[f_1^E \left(\beta_0^4 + \frac{25}{12}\beta_0^3\gamma_0 + \frac{35}{24}\beta_0^2\gamma_0^2 + \frac{5}{12}\beta_0\gamma_0^3 + \frac{1}{24}\gamma_0^4 \right) \right. \\ & \left. + \gamma_1\beta_0^3 + \frac{13}{12}\gamma_0\beta_1\beta_0^2 + \frac{13}{12}\gamma_0^2\beta_0\beta_1 + \frac{11}{6}\gamma_0\gamma_1\beta_0^2 + \gamma_0^2\beta_0\gamma_1 + \frac{1}{4}\beta_1\gamma_0^3 + \frac{1}{6}\gamma_1\gamma_0^3 \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \Delta_6 = & \frac{\pi^2}{3} \left[(f_4^E - \Delta_4) \left(10\beta_0^2 + \frac{9}{2}\beta_0\gamma_0 + \frac{\gamma_0^2}{2} \right) + (f_3^E - \Delta_3) \left(\frac{27}{2}\beta_0\beta_1 + 4\beta_0\gamma_1 + \frac{7}{2}\beta_1\gamma_0 + \gamma_0\gamma_1 \right) \right. \\ & + (f_2^E - \Delta_2) \left(8\beta_0\beta_2 + \frac{7}{2}\beta_0\gamma_2 + 3\beta_1\gamma_1 + \frac{5}{2}\beta_2\gamma_0 + 4\beta_1^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^2 + \gamma_0\gamma_2 \right) + f_1^E \left(\frac{7}{2}\beta_0\beta_3 + \frac{7}{2}\beta_1\beta_2 \right. \\ & \left. + 3\beta_0\gamma_3 + \frac{5}{2}\beta_1\gamma_2 + 2\beta_2\gamma_1 + \frac{3}{2}\beta_3\gamma_0 + \gamma_0\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2 \right) + \frac{1}{2}\gamma_2^2 + \frac{3}{2}\beta_2\gamma_2 + \frac{5}{2}\beta_0\gamma_4 + 2\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1 \\ & \left. + \frac{1}{2}\beta_4\gamma_0 + \gamma_0\gamma_4 + \gamma_1\gamma_3 \right] + \frac{7\pi^4}{15} \left[(f_2^E - \Delta_2) \left(5\beta_0^4 + \frac{77}{12}\beta_0^3\gamma_0 + \frac{71}{24}\beta_0^2\gamma_0^2 + \frac{7}{12}\beta_0\gamma_0^3 + \frac{1}{24}\gamma_0^4 \right) \right. \\ & + f_1^E \left(\frac{77}{12}\beta_0^3\beta_1 + \frac{5}{12}\beta_1\gamma_0^3 + 4\beta_0^3\gamma_1 + \frac{1}{6}\gamma_0^3\gamma_1 + \frac{10}{3}\beta_0\beta_1\gamma_0^2 + \frac{25}{3}\beta_0^2\beta_1\gamma_0 + \frac{3}{2}\beta_0\gamma_0^2\gamma_1 + \frac{13}{3}\beta_0^2\gamma_0\gamma_1 \right) \\ & + \frac{1}{4}\beta_2\gamma_0^3 + \frac{5}{2}\beta_0^3\gamma_2 + \frac{1}{6}\gamma_0^3\gamma_2 + \frac{3}{2}\beta_0^2\gamma_1^2 + \frac{5}{8}\beta_1^2\gamma_0^2 + \frac{1}{4}\gamma_0^2\gamma_1^2 + \frac{35}{24}\beta_0\beta_1^2\gamma_0 + \frac{5}{4}\beta_0\beta_2\gamma_0^2 + \frac{47}{12}\beta_0^2\beta_1\gamma_1 \\ & \left. + \frac{3}{2}\beta_0^2\beta_2\gamma_0 + \frac{5}{4}\beta_0\gamma_0\gamma_1^2 + \frac{5}{4}\beta_0\gamma_0^2\gamma_2 + \beta_1\gamma_0^2\gamma_1 + \frac{37}{12}\beta_0^2\gamma_0\gamma_2 + \frac{25}{6}\beta_0\beta_1\gamma_0\gamma_1 \right] \\ & + \frac{31\pi^6}{126} \gamma_0(\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{1}{2}\gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{3}\gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{4}\gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{5}\gamma_0 \right). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Аналитические выражения для $\Delta_1 - \Delta_4$ ранее были получены в [214] и согласуются с (3.57-3.59). Члены Δ_5 и Δ_6 впервые найдены в работе [28] в численной форме и в [218] в аналитическом виде. Шестипетлевой вклад Δ_6 не содержит пока ещё неизвестных коэффициентов β_5 и γ_5 , поскольку они входят лишь в линейно зависящие от $\ln(\mu^2/s)$ члены, которые, согласно (3.55), зануляются в евклидовой точке $\mu^2 = Q^2$. Однако, в определение Δ_6 входят коэффициенты β_4 и γ_4 пятого порядка ТВ, которые были вычислены соответственно в [57–59] и [219, 220].

Для дальнейшего удобства приведём явную n_l -зависимость первых пяти коэффициентов β -функции и аномальной размерности массы γ_m в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в случае цветовой группы $SU(3)$:

$$\beta_0 = -0.166667n_l + 2.58333, \quad (3.62)$$

$$\beta_1 = -0.791667n_l + 5.58333, \quad (3.63)$$

$$\beta_2 = +0.094039n_l^2 - 4.18084n_l + 18.0454, \quad (3.64)$$

$$\beta_3 = +0.005857n_l^3 + 1.5999n_l^2 - 23.951n_l + 88.684, \quad (3.65)$$

$$\beta_4 = -0.0017993n_l^4 - 0.233054n_l^3 + 16.46765n_l^2 - 148.1715n_l + 359.687, \quad (3.66)$$

$$\gamma_0 = 1, \quad (3.67)$$

$$\gamma_1 = -0.138889n_l + 4.06944, \quad (3.68)$$

$$\gamma_2 = -0.027006n_l^2 - 2.33813n_l + 17.2045, \quad (3.69)$$

$$\gamma_3 = +0.00579n_l^3 + 0.29354n_l^2 - 18.5378n_l + 80.117, \quad (3.70)$$

$$\gamma_4 = -0.0000854n_l^4 + 0.107977n_l^3 + 7.80682n_l^2 - 128.3970n_l + 423.611. \quad (3.71)$$

Отметим, что первое появление пропорциональных степеням π^2 вкладов (ζ_4 -член) в β -функцию происходит лишь в пятом порядке ТВ, в то время как коэффициенты $\gamma_m(a_s)$ содержат ζ_4 -функцию Римана уже на четырёхпетлевом уровне, а ζ_6 — в $\mathcal{O}(a_s^5)$ приближении.

Учитывая известные в аналитическом виде коэффициенты $t_1^M - t_3^M$, $\beta_0 - \beta_4$, $\gamma_0 - \gamma_4$, а также полуаналитические t_4^M , получаем следующие численные аналоги формул (3.57-3.61) для случая $SU(3)$ группы:

$$\Delta_2 = -0.274156n_l + 5.89434, \quad (3.72)$$

$$\Delta_3 = +0.198002n_l^2 - 10.04477n_l + 105.6221, \quad (3.73)$$

$$\Delta_4 = -0.315898n_l^3 + 20.67673n_l^2 - 403.9489n_l + 2272.002, \quad (3.74)$$

$$\Delta_5 = +0.427523n_l^4 - 37.745285n_l^3 + 1137.17794n_l^2 - 13767.2725n_l + 56304.639 \quad (3.75)$$

$$\Delta_6 = -0.818446n_l^5 + 85.37937n_l^4 + (-3345.0818 \pm 0.1371)n_l^3 + (61128.1667 \pm 4.7791)n_l^2 \quad (3.76)$$

$$+ (-518511.694 \pm 56.723)n_l + 1633115.62 \pm 347.65.$$

Среднеквадратичные погрешности во вкладе Δ_6 определяются ошибками, полученными применением метода наименьших квадратов в (3.41).

Стоит подчеркнуть, что в отличие от коэффициентов β -функции (3.62-3.66) и аномальной размерности массы (3.67-3.71), которые имеют нерегулярную по n_l структуру чередования знаков, выражения (3.72-3.76) для “кинематических” эффектов $\Delta_2 - \Delta_6$ удовлетворяют свойству знакопеременной по степеням n_l структуры.

Рассмотрим величину вкладов $\Delta_2 - \Delta_6$ для s , b , и t -кварков, соответствующих значениям $n_l = 3, 4, 5$. Результаты численного анализа представлены в Таблице 3.1.

Данные таблицы 3.1 демонстрируют значительный рост “кинематических” эффектов с увеличением порядка k теории возмущений. Как следует из асимптотической ренормальной формулы (3.29), данное обстоятельство частично связано с факториальным ростом коэффициентов t_k^M , а также с существенным увеличением \ln -независимых членов в правой части соотношения (3.55). В самом деле, обезразмеренный аналог интеграла (3.55) может быть

n_l	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
3	5.072	77.270	1237.717	24252.930	544133.68
4	4.798	68.611	966.817	17124.144	344053.30
5	4.524	60.348	729.689	11446.766	201430.55

Таблица 3.1: Численные значения вкладов Δ_k .

взяты точно для случая с произвольной степенью логарифма n :

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\ln^n x}{(x+1)^2} = \begin{cases} 2(1-2^{1-n})\zeta_n n! , & n \text{ чётное} , \\ 0 , & n \text{ нечётное} , \end{cases} \quad (3.77)$$

где переменная $x = s/Q^2$. Поскольку $1 < \zeta_{2p} \leq \zeta_2 < 2$ для любого $p \in \mathbb{N}$, то \ln -независимые вклады в (3.55) растут факториально с увеличением порядка ТВ. Сопоставляя формулы (3.77) и (3.57-3.61), мы приходим к выводу, что лидирующие по степеням π^2 поправки к членам Δ_{2p} чётного порядка ведут себя следующим образом при любом $p \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_{2p}^{\max \pi} = 2(1-2^{1-2p})\zeta_{2p}(2p-1)!\gamma_0 \prod_{j=1}^{2p-1} \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{j} \right) = 2(1-2^{1-2p})\zeta_{2p}\gamma_0\beta_0^{2p-1} \frac{\Gamma(2p + \gamma_0/\beta_0)}{\Gamma(1 + \gamma_0/\beta_0)}. \quad (3.78)$$

Таким образом, можно заключить, что эффекты аналитического продолжения (как и в случае с функцией Адлера и $R(s)$ -отношением) не являются пренебрежимо малыми. Более того, они сопоставимы по величине с соответствующими значениями поправок $t_k^M(n_l)$ к $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношению. К такому же выводу приводит сравнение π^2 -зависимых OS эффектов в выражениях (3.44-3.50) с независимыми от них слагаемыми. К тому же степени пропорциональных π^2 членов, возникающих в Δ_k -вкладах, совпадают с соответствующими степенями OS π^2 поправок. Поэтому, предлагается провести аналогию между этими по сути разными источниками возникновения π^2 слагаемых и использовать её для получения оценок поправок 5 и 6 порядков ТВ к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков. В самом деле, данная аналогия позволяет смоделировать появление пропорциональных π^2 OS членов в неизвестных коэффициентах t_5^M и t_6^M при помощи учёта эффектов аналитического продолжения. Рассмотрим влияние этих “кинематических” эффектов на примере использования метода эффективных зарядов (ECH) [112–114].

В работе [214] этот подход был впервые применён к определённой в евклидовой области функции $F(Q^2)/\bar{m}_q(Q^2)$ (3.53). Поскольку мы рассматриваем случай с n_l безмассовыми ароматами, бегущими внутри вставок в операторе собственной энергии тяжёлых кварков, то

коэффициенты f_k^E в (3.53) не зависят от масс (и других размерных кинематических переменных) и являются числовыми константами. В этом приближении величина $F(Q^2)/\bar{m}_q(Q^2)$ также не будет зависеть от этих параметров. Поэтому мы вправе непосредственно использовать подход, описанный в [60, 114]. В соответствии с этим методом и следуя предположению, что теоретические неопределённости в дисперсионном соотношении (3.51) не будут существенно влиять на асимптотическую структуру ряда ТВ для $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношения⁴, вводим эффективную константу связи $a_s^{eff}(Q^2)$ следующим образом:

$$\frac{F(Q^2)}{\bar{m}_q(Q^2)} = 1 + f_1^E a_s^{eff}(Q^2), \quad (3.79)$$

$$a_s^{eff}(Q^2) = a_s(Q^2) + \sum_{k=2}^{\infty} \phi_k a_s^k(Q^2), \quad (3.80)$$

где $\phi_k = f_k^E/f_1^E$. Коэффициенты ЕСН β -функции для $a_s^{eff}(Q^2)$ могут быть получены из соотношений (1.64-1.68), определённых нами ранее при исследовании калибровочно-инвариантной V-схемы, путём замены $a_k \rightarrow \varphi_{k+1}$.

Теперь используем идеи, развитые и описанные в работах [60, 214, 221]. Их смысл состоял в следующем: полагая $\beta_2^{eff} \approx \beta_2$, можно получить оценку для вклада $f_3^E \approx (f_2^E)^2/f_1^E + f_2^E \beta_1/\beta_0$, а затем, вычитая из него слагаемое Δ_3 , в соответствии с (3.56) найти приближённое выражение для коэффициента t_3^M (мы будем обозначать его $t_3^{M, ECH}$). Поступая аналогичным образом в следующем порядке ТВ, т.е. определяя f_4^E из условия $\beta_3^{eff} \approx \beta_3$ и вычитая Δ_4 , можно получить значение $t_4^{M, ECH}$. Оценки такого рода были выполнены в [221] для того чтобы найти приближённое значение тогда ещё неизвестного в полуаналитическом виде коэффициента t_4^M в соотношении между полюсными и бегущими массами c , b и t -кварков.

Сразу же отметим, что метод эффективных зарядов может быть непосредственно применён к величинам, определённым во времениподобной минковской области энергий, без промежуточного перехода к пространственноподобной евклидовой области. В этом случае следует заменить функции $F(Q^2)/\bar{m}_q(Q^2)$, $a_s^{eff}(Q^2)$ в (3.79-3.80) на их минковские аналоги $T(s)/\bar{m}_q(s)$ и $a_s^{eff}(s)$ с коэффициентами $\phi_k^M = t_k^M/t_1^M$ вместо ϕ_k . Тогда после применения главного анзаца ЕСН метода $\beta_k^{eff, M} \approx \beta_k$ (отчасти следующего из частичного сокращения ренормалонных вкладов в коэффициенты $\beta_k^{eff, M}$) можно сразу же получить оценки поправок t_k^M (мы обозначаем их $t_k^{M, ECH direct}$) без использования модельного дисперсионного соотношения (3.51) и, соответственно, без учёта дополнительных эффектов аналитического продолжения

⁴ В дальнейшем мы покажем, что данное предположение приводит к результатам, согласующимся с ренормалонными оценками на уровне фактора 2 (по крайней мере для физических $n_l = 3, 4, 5$), что вполне допустимо при использовании таких довольно грубых методов.

Δ_k . Тем не менее, вычисленные таким образом значения $t_k^{M, ECH\ direct}$ k -го порядка ТВ будут содержать типичные для OS-схемы π^2 -вклады, которые скрыты в известных аналитических или полуаналитических коэффициентах $(k - 1)$ -го порядка ТВ и ниже.

Посмотрим, насколько различаются вычисленные значения трёх и четырёхпетлевых поправок $t_3^{M, exact}$, $t_4^{M, exact}$ и их оценки, полученные в рамках обоих подходов ECH метода. Результаты сравнения приведены в Таблице 3.2:

n_l	$t_3^{M, exact}$	$t_3^{M, ECH}$	$t_3^{M, ECH\ direct}$	$t_4^{M, exact}$	$t_4^{M, ECH}$	$t_4^{M, ECH\ direct}$
3	116.494	124.097	95.757	1702.70 ± 1.41	1281.09	1438.76
4	94.418	97.728	76.257	1235.66 ± 1.47	986.13	1045.51
5	73.637	73.615	58.528	839.14 ± 1.54	719.38	710.02
6	54.161	51.775	42.615	509.07 ± 1.61	483.02	430.94
7	35.991	32.235	28.583	241.37 ± 1.70	279.37	207.02
8	19.126	15.034	16.535	31.99 ± 1.80	110.71	37.19

Таблица 3.2: Точные значения и оценки коэффициентов t_3^M и t_4^M .

Из Таблицы 3.2 следует, что оба варианта ECH метода дают неплохие по порядку величины оценки $\mathcal{O}(a_s^3)$ и $\mathcal{O}(a_s^4)$ коэффициентов, входящих в $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношение. Действительно, в третьем порядке ТВ в среднем отклонение оценок от истинных значений не превышает 20%, в четвёртом — для $t_4^{M, ECH\ direct}$ ошибка составляет около 15%, а для $t_4^{M, ECH}$ -оценок — несколько больше: максимальное отклонение наблюдается при $n_l = 3$ и составляет около 25% (за исключением значения $n_l = 8$, где истинное значение более чем в 3 раза меньше предсказываемого). Основываясь на данных результатах, мы полагаем, что в 5 и 6 порядке ТВ оценки поправок t_5^M и t_6^M , полученные в рамках обеих реализаций ECH метода, также будут весьма близки по порядку величины к истинным значениям пока ещё неизвестных $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ коэффициентов.

При учёте эффектов, связанных с переходом из евклидовой области энергий в минковскую, наши дальнейшие действия будут состоять в следующем. На первом этапе, зная явный вид известных коэффициентов $t_1^M - t_4^M$, находим соответствующие выражения для евклидовых $f_1^E - f_4^E$ при помощи соотношения (3.56). На втором шаге, полагая $\beta_4^{eff} \approx \beta_4$, определяем приближённое значение члена f_5^E при фиксированных n_l , а затем, вычитая из него вклад Δ_5 (3.60), получаем $t_5^{M, ECH}$. Продолжая данную процедуру далее, т.е. полагая $\beta_5^{eff} \approx \beta_5$ и ис-

пользуя при этом найденное на предыдущем этапе значение f_5^{E5} , мы оцениваем величину евклидова коэффициента f_6^E , а потом, вычитая из него вклад Δ_6 (3.61), находим $t_6^{M, ECH}$. Промежуточный результат для коэффициентов f_5^E и f_6^E имеет следующий вид [218]:

$$f_5^E \approx \frac{1}{3\beta_0} \left[3f_2^E \beta_3 + \left(f_3^E - 4 \frac{(f_2^E)^2}{f_1^E} \right) \beta_2 + \left(2 \frac{f_2^E f_3^E}{f_1^E} - f_4^E \right) \beta_1 \right] \quad (3.81)$$

$$+ 4 \frac{f_2^E f_4^E}{f_1^E} + \frac{5}{3} \frac{(f_3^E)^2}{f_1^E} - \frac{28}{3} f_3^E \left(\frac{f_2^E}{f_1^E} \right)^2 + \frac{14}{3} \frac{(f_2^E)^4}{(f_1^E)^3},$$

$$f_6^E \approx \frac{1}{4\beta_0} \left[4f_2^E \beta_4 + \left(2f_3^E - 8 \frac{(f_2^E)^2}{f_1^E} \right) \beta_3 + \left(8 \frac{(f_2^E)^3}{(f_1^E)^2} - 4 \frac{f_2^E f_3^E}{f_1^E} \right) \beta_2 \right] \quad (3.82)$$

$$+ \left(6 \frac{(f_2^E)^4}{(f_1^E)^3} + 3 \frac{(f_3^E)^2}{f_1^E} + 8 \frac{f_2^E f_4^E}{f_1^E} - 16 f_3^E \left(\frac{f_2^E}{f_1^E} \right)^2 - 2f_5^E \right) \beta_1 \Big]$$

$$+ 5 \frac{f_2^E f_5^E}{f_1^E} + 4 \frac{f_3^E f_4^E}{f_1^E} + 30 f_3^E \left(\frac{f_2^E}{f_1^E} \right)^3 - 12 f_2^E \left(\frac{f_3^E}{f_1^E} \right)^2 - 12 \frac{(f_2^E)^5}{(f_1^E)^4} - 14 f_4^E \left(\frac{f_2^E}{f_1^E} \right)^2.$$

Следуя вышеописанному алгоритму и используя формулы (3.81-3.82), (3.60-3.61), получаем оценки коэффициентов t_5^M и t_6^M , представленные в Таблице 3.3 [28, 218].

В Таблице 3.3 также приведены оценки пяти и шестипетлевых коэффициентов к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков, найденные при помощи асимптотической ренормальной формулы (3.29) и анализа результатов, полученных из large β_0 разложения [21]. Детали применения упомянутых здесь процедур будут даны ниже.

Как следует из формулы (3.26) пятипетлевой коэффициент t_5^M является полиномом четвёртой степени по n_l , т.е. $t_5^M = t_{5,4}^M n_l^4 + t_{5,3}^M n_l^3 + t_{5,2}^M n_l^2 + t_{5,1}^M n_l + t_{5,0}^M$ содержит 5 неизвестных параметров $t_{5,4}^M - t_{5,0}^M$. Для того чтобы получить их численные оценки необходимо знать как минимум 5 значений коэффициента t_5^M при фиксированных n_l . В нашем случае таковыми являются $3 \leq n_l \leq 7^6$. Аналогичная ситуация будет и для зависимости $\mathcal{O}(a_s^6)$ поправки от количества безмассовых ароматов кварков, но, в этом случае, необходимо знать как минимум 6 значений коэффициента t_6^M при $3 \leq n_l \leq 8$.

Используя представленные в Таблице 3.3 данные для $t_5^{M, ECH}$, получаем следующую

⁵ В связи с этим погрешность в определении приближённых шестипетлевых поправок к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков должна быть выше, чем для пятипетлевых.

⁶ В принципе, можно было бы рассмотреть большее множество значений n_l и найти неизвестные параметры из соответствующей переопределённой системы уравнений при помощи метода наименьших квадратов. Однако, заранее неизвестно, приведёт ли такое расширение значений n_l к более точному результату для неизвестных $t_{5,4}^M - t_{5,0}^M$. Например, как следует из Таблицы 3.2, с ростом n_l (начиная с $n_l = 7, 8$) отклонение оценок $t_3^{M, ECH}$ и $t_4^{M, ECH}$ от истинных начинает сильно увеличиваться (более 20%).

n_l	$t_5^{M, ECH}$	$t_5^{M, ECH \text{ direct}}$	$t_5^{M, r-n}$	$t_5^{M, FL}$	$t_5^{M, FL, M \rightarrow \bar{m}}$
3	28435	26871	34048	29864	20432
4	17255	17499	22781	21951	14924
5	9122	10427	13882	15725	10757
6	3490	5320	7466	10929	7693
7	-127	1871	3119	7323	5515
8	-2153	-196	344	4693	4027
n_l	$t_6^{M, ECH}$	$t_6^{M, ECH \text{ direct}}$	$t_6^{M, r-n}$	$t_6^{M, FL}$	$t_6^{M, FL, M \rightarrow \bar{m}}$
3	476522	437146	829993	679654	522713
4	238025	255692	511245	462561	353810
5	90739	133960	283902	304866	233282
6	8412	57920	137256	193449	149601
7	-29701	15798	50520	117284	93225
8	-39432	-2184	4747	67253	56410

Таблица 3.3: Оценки коэффициентов t_5 и t_6 , полученные в рамках обоих вариантов ECH метода, асимптотической ренормальной формулы и large β_0 -разложения. Последние два столбца отвечают различным выборам начальных масштабов.

систему уравнений с матрицей Вандермонда⁷:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{5,0}^{M, ECH} \\ t_{5,1}^{M, ECH} \\ t_{5,2}^{M, ECH} \\ t_{5,3}^{M, ECH} \\ t_{5,4}^{M, ECH} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28435 \\ 17255 \\ 9122 \\ 3490 \\ -127 \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

⁷ Матрица Вандермонда обладает интересными свойствами. В самом деле, поскольку элементы её каждой строки являются членами геометрической прогрессии, то её определитель равен $\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq k} ((n_l + j) - (n_l + i)) = \prod_{0 \leq i < j \leq k} (j - i)$, когда количество ароматов меняется в пределах от n_l до $(n_l + k)$, $k \in \mathbb{N}$. В ряде теоретических исследований количество n_l иногда полагается даже отрицательным числом, и поэтому, строго говоря, индекс k может и не принадлежать множеству натуральных чисел. Однако, в этой работе рассматриваются только положительные значения k .

Её решением является [28, 218]

$$t_5^{M, ECH} \approx 2.5n_l^4 - 136n_l^3 + 2912n_l^2 - 26976n_l + 86620. \quad (3.84)$$

В случае шестипетлевого коэффициента t_6^M решение подобной системы с $3 \leq n_l \leq 8$ приводит к разложению

$$t_6^{M, ECH} \approx -4.9n_l^5 + 352n_l^4 - 9708n_l^3 + 131176n_l^2 - 855342n_l + 2096737. \quad (3.85)$$

Выражения (3.84-3.85) демонстрируют, что применение ECH подхода к физической величине $F(Q^2)/\bar{m}_q(Q^2)$, определённой в евклидовой области, с учётом эффектов аналитического продолжения Δ_5 , Δ_6 приводит, как и в случае лидирующего large- β_0 разложения, к знакопеременной по n_l структуре коэффициентов t_5^M и t_6^M . Напомним, что такая же структура наблюдается и в известных коэффициентах $t_2^M - t_4^M$ (3.44-3.50), (3.41):

$$t_2^M = -1.0414n_l + 13.443, \quad (3.86)$$

$$t_3^M = +0.6527n_l^2 - 26.655n_l + 190.60, \quad (3.87)$$

$$t_4^M = -0.6781n_l^3 + 43.396n_l^2 - (745.72 \pm 0.15)n_l + (3567.61 \pm 1.34). \quad (3.88)$$

Рассмотрим теперь влияние полученных в Таблице 3.3 $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ поправок $t_5^{M, ECH}$ и $t_6^{M, ECH}$ на величину полюсных масс тяжёлых кварков. Здесь мы рассматриваем асимптотическое разложение в ряд ТВ именно для полюсных масс, поскольку бегущие массы не чувствительны к ИК ренормалонным вкладам и, поэтому, в частности, могут быть с хорошей точностью извлечены из низкоэнергетических правил сумм для узких резонансов J/ψ и Υ . Для численных оценок мы используем следующие среднемировые значения бегущих масс $\bar{m}_c(\bar{m}_c^2) = 1.275$ ГэВ и $\bar{m}_b(\bar{m}_b^2) = 4.180$ ГэВ, взятые из PDG(18) [153] в N³LO приближении (см. также, например, [24]). Для t -кварка полагаем $\bar{m}_t(\bar{m}_t^2) = 164.3$ ГэВ, что согласуется с результатами работ [222, 223] и не противоречит данным, приведённым в PDG(18), которые были извлечены из измерения $\sigma(t\bar{t})$ в $p\bar{p}$ столкновениях. В качестве начальной нормировочной точки мы берём $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1181 \pm 0.0011$ при $M_Z = 91.1876$ ГэВ [153] (см. раздел 1.7.4). Отсюда для b -кварка получаем $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=4)} \approx 210$ МэВ. Для самосогласованности результатов мы используем N³LO условия сшивок [154, 224]⁸ и находим численные значения $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=3)}$ и $\Lambda_{\overline{\text{MS}}, \text{N}^3\text{LO}}^{(n_l=5)}$. Используя также разложение константы связи по обратным степеням логарифмов

⁸ В работе [224] также представлены N⁴LO условия сшивок при переходе через пороги рождения новых ароматов кварков. В силу довольно грубых оценок, представленных в Таблице 3.3, мы не включаем в наш анализ влияние этих пятипетлевых эффектов. Тем более, что их учёт на самом деле практически не заметен.

в N³LO приближении, получаем:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_l=3)} \approx 292 \text{ МэВ}, \quad \alpha_s(\overline{m}_c^2) \approx 0.3947, \quad (3.89)$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_l=4)} \approx 210 \text{ МэВ}, \quad \alpha_s(\overline{m}_b^2) \approx 0.2256, \quad (3.90)$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_l=5)} \approx 89 \text{ МэВ}, \quad \alpha_s(\overline{m}_t^2) \approx 0.1085. \quad (3.91)$$

Подставляя эти значения в формулу (3.25) и учитывая (3.86-3.88), приходим к следующему $\mathcal{O}(a_s^4)$ разложению полюсной массы c , b и t -кварков:

$$\frac{M_c}{1 \text{ GeV}} \approx 1.275 + 0.214 + 0.208 + 0.295 + 0.541, \quad (3.92)$$

$$\frac{M_b}{1 \text{ GeV}} \approx 4.180 + 0.400 + 0.200 + 0.146 + 0.137, \quad (3.93)$$

$$\frac{M_t}{1 \text{ GeV}} \approx 164.300 + 7.566 + 1.614 + 0.498 + 0.196. \quad (3.94)$$

Как уже говорилось, из (3.92) следует, что асимптотическая структура ряда ТВ для c -кварка начинает проявляться с двух (трёх) петлевого уровня. В связи с этим оказывается невозможным определение полюсной массы c -кварка уже в этих сравнительно низких порядках ТВ. Поэтому в феноменологических исследованиях предпочтительнее использовать бегущую массу очарованного кварка.

Для b -кварка $\mathcal{O}(a_s^3)$ и $\mathcal{O}(a_s^4)$ вклады близки по величине (3.93) и для однозначного ответа на вопрос о номере порядка ТВ, начиная с которого поправки к $M_b/\overline{m}_b(\overline{m}_b^2)$ -отношению начнут увеличиваться, желательно получить какие-либо данные о величине $\mathcal{O}(a_s^5)$ вклада.

В случае t -кварка на рассмотренном уровне ТВ асимптотическая природа всё ещё не проявляется. В самом деле, все поправки с ростом порядка ТВ уменьшаются, хотя и не очень быстро (3.94). Трёх и четырёхпетлевые вклады в (3.94) не являются пренебрежимо малыми и сравнимы с точностью современных измерений полюсной массы топ-кварка, которая составляет $\sim 500 - 800$ МэВ [225–227].

Для оценки величины поправок 5 и 6-го порядков ТВ к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков мы будем использовать приведённые в (3.89-3.91) значения констант связи, полученные в N³LO приближении. Данное допущение возможно, поскольку понятно, что теоретическая неопределённость метода эффективных зарядов существенно превышает ошибку, связанную с учётом эффекта бега a_s в 5-м порядке ТВ, который на самом деле очень мал. Используя оценки $t_5^{M, ECH}$ и $t_6^{M, ECH}$ (см. Таблицу 3.3), получаем

следующие аналоги соотношений (3.92-3.94) [28, 218]:

$$\frac{M_c^{ECH}}{1 \text{ GeV}} \approx 1.275 + 0.214 + 0.208 + 0.295 + 0.541 + \boxed{1.135 + 2.389}, \quad (3.95)$$

$$\frac{M_b^{ECH}}{1 \text{ GeV}} \approx 4.180 + 0.400 + 0.200 + 0.146 + 0.137 + \boxed{0.137 + 0.138}, \quad (3.96)$$

$$\frac{M_t^{ECH}}{1 \text{ GeV}} \approx 164.300 + 7.566 + 1.614 + 0.498 + 0.196 + \boxed{0.074 + 0.025}. \quad (3.97)$$

Метод эффективных зарядов (ECH), применённый изначально к евклидовой величине $F(Q^2)/\bar{m}_q(Q^2)$, а затем дополненный эффектами аналитического продолжения в минковскую область, предсказывает значительный рост поправок пятого и шестого порядков ТВ в случае s -кварка. Действительно, $\mathcal{O}(a_s^5)$ вклад почти в 2 раза превышает $\mathcal{O}(a_s^4)$, а $\mathcal{O}(a_s^6)$ в 2 раза больше пятипетлевой поправки, и даже больше первого члена разложения в (3.95). Для b -кварка данный подход приводит к своеобразному эффекту плато: $\mathcal{O}(a_s^4)$, $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ поправки совпадают. Однако, данный факт носит случайный характер. Действительно, при другой нормировке бегущей массы b -кварка, например при $\mu = 2\bar{m}_b$, данный эффект стабилизации поправок наблюдаться не будет. Более того, он не проявляется ни в одном из рассмотренных нами ниже приближённых методов. Однако, даже эти оценки указывают на то, что асимптотическая структура ряда ТВ для $M_b/\bar{m}_b(\bar{m}_b^2)$ -отношения в действительности наблюдается на четырёхпетлевом уровне. В случае t -кварка пяти и шестипетлевые вклады в полюсную массу уменьшаются, что свидетельствует об отсутствии явного асимптотического поведения в этих порядках ТВ. Посмотрим, к каким результатам приведёт ECH метод, применённый к величине $T(s)/\bar{m}_q(s)$, непосредственно определённой в минковской области энергий.

Учитывая вышеописанные замечания из этого раздела, касающиеся оценок $t_5^{M, ECH \text{ direct}}$ и $t_6^{M, ECH \text{ direct}}$ (см. 2-ой абзац после формулы (3.80) и результаты оценок, представленные в Таблице 3.3), получаем следующие зависимости этих коэффициентов от n_l , найденные по той же схеме, что и выражения (3.84-3.85) [28, 218]:

$$t_5^{M, ECH \text{ direct}} \approx 1.2n_l^4 - 77n_l^3 + 1959n_l^2 - 20445n_l + 72557, \quad (3.98)$$

$$t_6^{M, ECH \text{ direct}} \approx -2.2n_l^5 + 148n_l^4 - 4561n_l^3 + 71653n_l^2 - 538498n_l + 1519440. \quad (3.99)$$

Соотношения (3.98-3.99), также как и (3.84-3.85), удовлетворяют свойству знакопеременной по n_l структуры $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ коэффициентов $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношения. Различие между n_l -зависимыми слагаемыми в (3.98-3.99) и (3.84-3.85) весьма небольшое — в среднем, отдельные члены отличаются не более чем в 2 раза. Это достаточно неплохой результат для таких грубых методов оценки.

Численный эффект данных приближённых поправок на значения полюсных масс реальных тяжёлых кварков равен (обведён в рамку) [28, 218]:

$$\frac{M_c^{ECH\ direct}}{1\ \text{GeV}} \approx 1.275 + 0.214 + 0.208 + 0.295 + 0.541 + \boxed{1.072 + 2.192}, \quad (3.100)$$

$$\frac{M_b^{ECH\ direct}}{1\ \text{GeV}} \approx 4.180 + 0.400 + 0.200 + 0.146 + 0.137 + \boxed{0.140 + 0.147}, \quad (3.101)$$

$$\frac{M_t^{ECH\ direct}}{1\ \text{GeV}} \approx 164.300 + 7.566 + 1.614 + 0.498 + 0.196 + \boxed{0.084 + 0.037}. \quad (3.102)$$

Оценки (3.100-3.102) близки к (3.95-3.97). Единственная заметная разница наблюдается в поведении $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ вкладов в полюсную массу прелестного кварка. В самом деле, в отличие от (3.96) разложение (3.101) указывает на отсутствие какой бы то ни было области стабильности.

Столь хорошее совпадение коэффициентов разложения (3.84-3.85) и (3.98-3.99), а также оценённых поправок в (3.95-3.97) и (3.100-3.102) весьма неожиданно, поскольку численный эффект членов аналитического продолжения Δ_k , учитываемых в первом рассматриваемом нами подходе и не учитываемых во втором, значителен. Более того, он сопоставим с соответствующими поправками t_k^M . Данный факт может свидетельствовать в пользу реалистичности сделанных нами оценок. Для большей уверенности рассмотрим также другие методы получения оценок коэффициентов t_5^M и t_6^M .

3.4. Сравнение с ренормалонными оценками

Вернёмся к асимптотической ренормалонной формуле (3.29). Как следует из работ [22–24, 190], возможные пути нахождения значений нормировочного фактора N_m в рассматриваемом конечном порядке ТВ могут различаться. Мы же в данном разделе будем использовать следующую процедуру фиксации значений N_m . Поскольку коэффициенты t_3^M и t_4^M известны (3.87-3.88), то сопоставление их значений с формулой (3.29) при фиксированных n_l позволяет прямо определить $\mathcal{O}(a_s^3)$ и $\mathcal{O}(a_s^4)$ значения параметра $N_m(k, n_l)$. Результаты данного анализа были представлены в [22] и приведены в Таблице 3.4:

n_l	3	4	5	6	7	8
$N_m, [\mathcal{O}(a_s^3)]$	0.57	0.55	0.52	0.48	0.41	0.27
$N_m, [\mathcal{O}(a_s^4)]$	0.54	0.51	0.46	0.39	0.28	0.06

Таблица 3.4: Значения фактора N_m в трёх и четырёхпетлевом приближении в зависимости от n_l .

Сравнение трёх и четырёхпетлевых значений N_m демонстрирует неплохую стабильность этого параметра по отношению к изменению n_l , по крайней мере для физических $n_l = 3, 4, 5$, для которых относительная разница между $\mathcal{O}(a_s^3)$ и $\mathcal{O}(a_s^4)$ значениями N_m не превышает 15%. Но, с ростом n_l это отклонение существенно увеличивается. Наше основное допущение при оценке коэффициентов t_5^M и t_6^M с помощью асимптотической ренормальной формулы (3.29) будет состоять в использовании для этой цели четырёхпетлевых значений фактора N_m , несмотря на, судя по всему, значительные отклонения $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ параметров N_m от их $\mathcal{O}(a_s^4)$ значений в области больших n_l . Однако, данное допущение не выглядит более грубым, нежели условие $\beta_k^{eff} \approx \beta_k$, используемое нами в предыдущем разделе при применении ЕСН метода, и, на первый взгляд, приводящее к сравнительно разумным оценкам коэффициентов t_5^M и t_6^M . Посмотрим, к каким результатам приведёт вышеописанное нами допущение.

Полученные таким образом оценки $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ коэффициентов, входящих в соотношение между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков, представлены в Таблице 3.3 и обозначены как $t_5^{M, r-n}$ и $t_6^{M, r-n}$. Сравнение этих значений с оценками, предсказанными с помощью обоих вариантов ЕСН метода, указывает на качественное согласие результатов всех трёх подходов, особенно для физически мотивированных $n_l = 3, 4, 5$. С точки зрения асимптотического поведения рядов ТВ существенное различие наблюдается для нефизического сектора n_l . Действительно, в то время как ренормальная формула (3.29) в рассматриваемом нами приближении предсказывает положительные значения пяти и шестипетлевых поправок к $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношению при $n_l = 7, 8$, оба ЕСН подхода в некоторых случаях приводят к отрицательным значениям этих вкладов.

Также стоит отметить, что наши оценки коэффициента t_5^M для b -кварка по порядку величины близки к предсказаниям того же коэффициента, полученного в [228] из анализа глобальных фитов связанного состояния тяжёлых кварков $Q\bar{Q}$.

Используя данные из Таблицы 3.3 находим [28, 218]:

$$t_5^{M, r-n} \approx -22n_l^4 + 416n_l^3 - 1669n_l^2 - 11116n_l + 72972, \quad (3.103)$$

$$t_6^{M, r-n} \approx 99n_l^5 - 2903n_l^4 + 30109n_l^3 - 99563n_l^2 - 305378n_l + 2040263. \quad (3.104)$$

Выражения (3.103-3.104) демонстрируют отсутствие знакопеременной по n_l структуры пяти и шестипетлевых поправок⁹, предсказываемой в рамках обеих реализаций метода эффективных зарядов и следующее из ренормального large- β_0 разложения [21], рассмотренного нами ниже. Причём нарушение знакопеременности происходит не в одном из n_l -зависимых

⁹ Применение асимптотической формулы (3.29) с фактором N_m , взятым в трёхпетлевом приближении, также не приводит к знакопеременной по степеням n_l структуре $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ поправок.

членов разложения $t_5^{M, r-n}$ и $t_6^{M, r-n}$, а сразу в нескольких — начиная с лидирующего (!) и заканчивая n_l^2 коэффициентом в (3.103-3.104). Несмотря на довольно неплохое сходство $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ коэффициентов $t_k^{M, ECH}$, $t_k^{M, ECH direct}$ и $t_k^{M, r-n}$ при $n_l = 3, 4, 5$, неправильные знаки лидирующих по степеням n_l поправок в (3.103-3.104) и, кроме того, сильные отклонения от их истинных абсолютных значений (см. [21], где эти члены были найдены численно) свидетельствуют либо о неправомерности использования $\mathcal{O}(a_s^4)$ значения фактора N_m для оценок коэффициентов пятого и шестого порядков ТВ¹⁰, либо о необходимости учёта дополнительных источников неопределённости в формуле (3.29). В частности, эти неопределённости могут быть связаны с тем фактом, что типичные для OS-схемы π^2 -эффекты входят в результаты явных вычислений вкладов ренормалонного типа (ведущих по степеням n_l) в коэффициенты t_k^M (см. (3.44), (3.46), (3.49)), но не учитываются в асимптотической формуле (3.29).

Учтём известные значения лидирующих по n_l вкладов в $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ коэффициенты $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношения, вычисленные в [21], и сравним полученные таким образом оценки членов t_5^M и t_6^M с найденными нами ранее.

3.4.1. Следствия из вычислений вкладов лидирующей ренормалонной цепочки

Ещё до появления аналитических вычислений поправок третьего [194] и четвёртого [199] порядков ТВ к соотношению между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков, в работе [21] были получены численные значения ведущих по n_l поправок к коэффициентам t_k^M вплоть до 9 порядка ТВ. Данные результаты следуют из вычисления лидирующих вкладов ренормалонного типа, генерируемых цепочкой из последовательных вставок фермионных петель (FL) в глюонную линию, перенормирующую пропагатор тяжёлых кварков. Характерная диаграмма подобного вида представлена на Рис. 3.1:

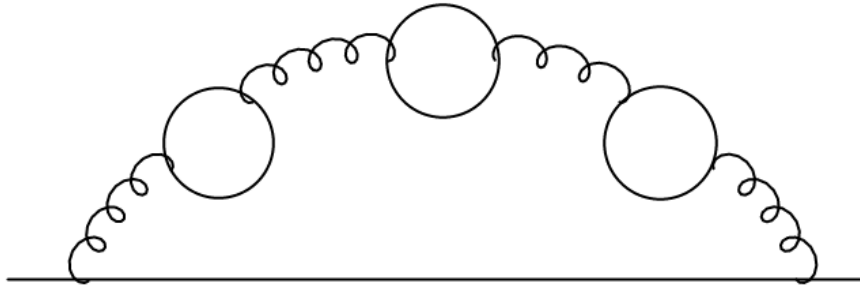


Рис. 3.1: Диаграмма ренормалонного типа, перенормирующая кварковый пропагатор.

¹⁰ В таком случае реальная предсказательная сила формулы (3.29) оказывается не столь большой, как, даже у такого довольно грубого подхода, как метод эффективных зарядов.

Применяя к результатам работы [21] метод наивной неабелианизации (ННА), который в нормировке, используемой в данной работе, эквивалентен подстановке $n_l \rightarrow -6\beta_0 = n_l - 31/2$, можно оценить полную зависимость многопетлевых поправок к $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношению от n_l в рамках large- β_0 приближения. Поскольку ведущие по n_l члены в коэффициентах t_k^M не зависят от масштаба μ^2 , то мы рассмотрим оценки вкладов $\mathcal{O}(a_s^5)$ и $\mathcal{O}(a_s^6)$ порядков ТВ в двух наиболее часто используемых нормировках, а именно при $\mu^2 = \overline{m}_q^2$ и $\mu^2 = M_q^2$ с последующим переходом к нормировке на бегущей массе. Полученные таким образом оценки (обозначаем их как $t_k^{M, FL}$ и $t_k^{M, FL, M \rightarrow \overline{m}}$) приведены в Таблице 3.3 [28, 218].

Анализируя данные таблицы, можно заметить, что изменение масштаба от $\mu^2 = M_q^2$ к $\mu^2 = \overline{m}_q^2$ сильно уменьшает значения пяти и шестипетлевых коэффициентов по сравнению с оценками, полученными непосредственно при $\mu^2 = \overline{m}_q^2$. Из Таблицы 3.3 также не следует однозначного вывода о том, в какой из двух рассматриваемых нормировок FL-оценки лучше согласуются с оценками, полученными при помощи ЕСН подхода и из асимптотической ренормальной формулы. В отличие от метода эффективных зарядов, и FL-подход, и асимптотическая формула (3.29) предсказывают положительные значения поправок при $n_l = 7, 8$. Однако, как и в случае ЕСН метода, подход, основанный на применении ННА к результатам вычисленных в явном виде ведущих по n_l вкладов в коэффициенты t_k^M , включает в себя пропорциональные π^2 типичные OS поправки.

Результаты Таблицы 3.3 приводят к следующим разложениям в нормировке $\mu^2 = \overline{m}_q^2$

$$t_5^{M, FL} \approx 0.9n_l^4 - 59n_l^3 + 1469n_l^2 - 16156n_l + 66641, \quad (3.105)$$

$$t_6^{M, FL} \approx -1.5n_l^5 + 125n_l^4 - 4127n_l^3 + 68088n_l^2 - 561727n_l + 1853698, \quad (3.106)$$

и в нормировке $\mu^2 = M_q^2$ с последующим переходом к $\mu^2 = \overline{m}_q^2$:

$$t_5^{M, FL, M \rightarrow \overline{m}} \approx 0.9n_l^4 - 56n_l^3 + 1256n_l^2 - 12383n_l + 47721, \quad (3.107)$$

$$t_6^{M, FL, M \rightarrow \overline{m}} \approx -1.5n_l^5 + 120n_l^4 - 3779n_l^3 + 58846n_l^2 - 460910n_l + 1468466. \quad (3.108)$$

Поскольку FL-подход в совокупности с применением процедуры ННА предсказывает, что поправка k -го порядка ТВ пропорциональна множителю $\beta_0^{k-1}(n_l)$, то свойство её знакопеременной по n_l структуры будет всегда автоматически выполняться в рамках данной приближённой процедуры. Что мы и видим на примере формул (3.105-3.106) и (3.107-3.108). Данное утверждение не зависит от выбора начальной точки нормировки масштаба. Несмотря на то, что асимптотическая ренормальная формула (3.29) и выражения для FL-оценок содержат множитель $\beta_0^{k-1}(n_l)$, первый подход в рассматриваемом нами приближении не приводит к знакопеременной по n_l структуре поправок t_k^M , тогда как второй удовлетворяет этому

свойству. Разница кроется в наличии n_l -зависимых факторов $\Gamma(k+b)/\Gamma(1+b)$ и N_m в асимптотической формуле (3.29).

Выражения (3.105-3.106), полученные непосредственно при $\mu^2 = \bar{m}_q^2$, по величине отдельно взятых n_l -зависимых членов ближе к оценкам (3.84-3.85) и (3.98-3.99), следующим из предсказаний обоих вариантов ЕСН метода (различие не более, чем в 2 раза), нежели разложения для $t_5^{M, FL, M \rightarrow \bar{m}}$ и $t_6^{M, FL, M \rightarrow \bar{m}}$ коэффициентов.

Используя результаты работы [21], можно изучить асимптотическую структуру соотношения между полюсными и бегущими массами t -кварка в больших деталях и определить характерный номер порядка ТВ, начиная с которого асимптотическое поведение этого соотношения будет проявляться. Комбинируя разложение (3.94) с результатами [21], нормированными на $\mu^2 = \bar{m}_t^2$, можно получить в рамках large- β_0 подхода следующее численное представление полюсной массы топ-кварка:

$$\begin{aligned} \frac{M_t^{FL}}{1 \text{ GeV}} &\approx 164.300 + 7.566 + 1.614 + 0.498 + 0.196 \\ &+ \boxed{0.127 + 0.085 + 0.067 + 0.063 + 0.066 \dots} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Выражение (3.109) указывает на то, что первые следы асимптотической природы в случае t -кварка могут наблюдаться после 7-го порядка ТВ.

В заключение данного раздела сделаем два замечания. Первое касается n_l -структуры пяти и шестипетлевых коэффициентов t_k^M , полученных с помощью асимптотической ренормальной формулы (3.29). Её знакопеременный характер эффективно восстанавливается при учёте известных ведущих по степеням n_l поправок $t_{5,4}^M = 0.9$ и $t_{6,5}^M = -1.5$ [21], а также исключении из рассмотрения точки, соответствующей значению $n_l = 3^{11}$ (для больших деталей см. [218]). Метод же эффективных зарядов приводит к свойству чередования знаков в разложении поправок t_k^M по количеству ароматов безмассовых кварков вне зависимости от того, исключается ли из рассмотрения точка $n_l = 3$ или $n_l = 7(8)$. Второе замечание относится к соотношению между полюсными и бегущими массами заряженных лептонов в КЭД. Здесь асимптотическая структура соответствующих рядов ТВ не наблюдается и свойство знакопеременности по n_l отсутствует на четырёхпетлевом уровне ТВ¹².

Кратко подытожим результаты данной главы, касающиеся исследования асимптотического поведения соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков.

¹¹ К примеру, исключение точек, соответствующих значениям $n_l = 7$ или 8, не приводит к знакопеременности поправок $t_k^{M, r-n}$.

¹² Данный вывод может быть сделан на основе результатов аналитических и полуаналитических расчетов [191, 194, 196, 199, 208]. В явном виде $M_l/\bar{m}_l(\bar{m}_l^2)$ -отношение в $\mathcal{O}(a^4)$ приближении приведено в [218].

Несмотря на довольно грубые оценки, все рассмотренные нами приближённые методы указывают на то, что в случае b -кварка рост поправок ТВ к соотношению между полюсными и бегущими массами начинает происходить с 5-го порядка ТВ, а это значит, что в современных прецизионных феноменологических приложениях целесообразнее использовать понятие его бегущей массы. В случае с t -кварком рост поправок не наблюдается даже на шестипетлевом уровне, поэтому полюсная масса t -кварка является хорошо определённой величиной по крайней мере в этом порядке ТВ. Оценки показывают, что, по всей видимости, асимптотический характер $M_t/\overline{m}_t(\overline{m}_t^2)$ -отношения начинает проявляться после 7-го порядка ТВ. Исследования n_l -зависимости поправок t_5^M и t_6^M не выносятся в основные результаты работы, поскольку носят весьма приближённый характер и содержат большие теоретические неопределённости. Несмотря на это, поправки t_k^M пятого и шестого порядков ТВ, полученные из рассмотренных нами приближённых методов, довольно неплохо согласуются друг с другом для физических значений $n_l = 3, 4, 5$ (в среднем с фактором 2, что допустимо при таких довольно грубых оценках).

Заключение

Кратко сформулируем основные итоги представленной работы. В настоящей диссертации были получены следующие результаты:

1. В главе 1 впервые представлены аналитические четырёхпетлевые выражения для β -функции в V -схеме в КХД, а также для функции Адлера и $R(s)$ -отношения e^+e^- аннигиляции в адроны, коэффициентной функции правила сумм Бьёркена глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в V и $m\text{MOM}$ -схеме. Показано уменьшение схемной и калибровочной зависимости рядов ТВ для $R(s)$ -отношения при переходе от двух к четырёхпетлевому приближению. Продемонстрировано, что β -функция в V -схеме в КЭД совпадает с Ψ -функцией Гелл-Манна–Лоу на трёхпетлевом уровне и начинает от неё отличаться с 4 порядка теории возмущений на поправку, связанную с проявлением эффектов рассеяния света на свете в трёхпетлевом вкладе к статическому кулоновскому потенциалу. Вследствие этого V -схему в КЭД можно рассматривать как аналог схемы импульсных вычитаний MOM.
2. В главе 2 показано, что в КЭД помимо $\overline{\text{MS}}$ -подобных схем, обобщённое соотношение Крютера в четырёхпетлевом приближении выполняется во всех наиболее часто используемых схемах перенормировок, таких как MOM, V -схема и схема вычитаний на массовой поверхности. Причина данного обстоятельства кроется в наличии тождества Уорда в КЭД. В данном порядке теории возмущений также продемонстрирована справедливость обобщённого соотношения Крютера в V -схеме в КХД. В случае схемы импульсных вычитаний $m\text{MOM}$ в данном соотношении факторизация $\beta(a_s)$ -функции в члене, нарушающем конформную симметрию, возможна лишь при $\xi = 0, -1, -3$ в третьем порядке ТВ, и только при $\xi = 0$ в четырёхпетлевом приближении. Впервые показано, что, если обобщённое соотношение Крютера будет справедливым в $\overline{\text{MS}}$ -схеме во всех порядках ТВ, то оно также будет верным во всех порядках и в классе MOM-подобных схем в КХД в калибровке Ландау. Делается вывод, что калибровочная инвариантность схем перенормировок является достаточным, но не является необходимым условием для выполнения обобщённого соотношения Крютера в КХД.
3. В главе 3 метод наименьших квадратов был применён для нахождения численных значений двух неизвестных в аналитическом виде четырёхпетлевых коэффициентов соотношения между полюсными и бегущими в $\overline{\text{MS}}$ -схеме массами тяжёлых кварков из рассмотрения массива численных данных для поправки 4-го порядка теории возмущений

к данному разложению при фиксированных значениях ароматов. Показана устойчивость полученных решений по отношению к вариации как количества рассматриваемых уравнений, так и количества неизвестных в соответствующей переопределённой системе алгебраических уравнений. С целью изучения структуры ряда теории возмущений для соотношения между полюсными и бегущими массами b -кварка была выполнена оценка вклада 5-го порядка ТВ в данное соотношение при помощи трёх различных процедур, которые позволили более детально понять, что асимптотический характер начинает проявляться в случае b -кварка уже в 4-ом порядке ТВ. Аналогичные оценки 5 и 6-го порядков ТВ были выполнены и для t -кварка. Они позволяют убедиться в том, что асимптотическое поведение соответствующего ряда ТВ не проявляется даже на шестипетлевом уровне. В соответствии с результатами применения процедуры наивной неабелианизации к результатам вычислений ведущих по степеням количества ароматов вкладов в поправки высших порядков ТВ к $M_t/\bar{m}_t(\bar{m}_t^2)$ -отношению показано, что его асимптотический характер, по всей видимости, начинает проявляться после 7-го порядка ТВ.

Автор хотел бы выразить глубокую благодарность научному руководителю Андрею Львовичу Катаеву за руководство многолетней научной работы и неоценимую помощь в освоении предметной области. Также хотелось бы поблагодарить Михаила Юрьевича Калмыкова за плодотворные и интересные обсуждения. Автор выражает благодарность всем сотрудникам и аспирантам отдела теоретической физики ИЯИ РАН за уникальную творческую и рабочую атмосферу, а также всему преподавательскому составу МФТИ за высокий профессионализм и индивидуальный подход к каждому обучающемуся.

Список сокращений

КХД — квантовая хромодинамика

КЭД — квантовая электродинамика

КТП — квантовая теория поля

УФ — ультрафиолетовый

ИК — инфракрасный

ТВ — теория возмущений

$\overline{\text{MS}}$ — модифицированная схема минимальных вычитаний

NS — несинглетный

SI — синглетный

РГ — ренормгрупповой

PDG — Particle Data Group

LO, NLO, NNLO, N³LO — лидирующее, следующее за лидирующим, трёхпетлевое и четырёхпетлевое приближение

ЕСН — метод эффективных зарядов (effective charges)

large- β_0 — лидирующее разложение по большим степеням β_0

АВВ — аксиал–вектор–вектор

ОСК — обобщённое соотношение Крютера

КС — конформная симметрия

OS-схема — схема перенормировок на массовой поверхности (on-shell)

МНК — метод наименьших квадратов

ННА — метод наивной неабелианизации

Приложение А

Решение ренормгрупповых уравнений на шестипетлевом уровне

Первые четыре коэффициента β -функции $SU(N_c)$ КХД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме известны из вычислений [11, 12, 50–56] и имеют следующий вид:

$$\beta_0 = \frac{11}{12}C_A - \frac{1}{3}T_F n_f, \quad (\text{A.1})$$

$$\beta_1 = \frac{17}{24}C_A^2 - \frac{1}{4}C_F T_F n_f - \frac{5}{12}C_A T_F n_f, \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & \frac{2857}{3456}C_A^3 + \frac{1}{32}C_F^2 T_F n_f - \frac{205}{576}C_F C_A T_F n_f - \frac{1415}{1728}C_A^2 T_F n_f \\ & + \frac{11}{144}C_F T_F^2 n_f^2 + \frac{79}{864}C_A T_F^2 n_f^2, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \left(\frac{150653}{124416} - \frac{11}{576}\zeta_3 \right) C_A^4 + \left(-\frac{39143}{20736} + \frac{17}{96}\zeta_3 \right) C_A^3 T_F n_f \\ & + \left(\frac{7073}{62208} - \frac{41}{144}\zeta_3 \right) C_A^2 C_F T_F n_f - \left(\frac{1051}{1728} - \frac{11}{72}\zeta_3 \right) C_A C_F^2 T_F n_f + \frac{23}{128}C_F^3 T_F n_f \\ & + \left(\frac{3965}{10368} + \frac{7}{72}\zeta_3 \right) C_A^2 T_F^2 n_f^2 + \left(\frac{169}{864} - \frac{11}{36}\zeta_3 \right) C_F^2 T_F^2 n_f^2 \\ & + \left(\frac{67}{243} + \frac{7}{36}\zeta_3 \right) C_A C_F T_F^2 n_f^2 + \frac{53}{7776}C_A T_F^3 n_f^3 + \frac{77}{3888}C_F T_F^3 n_f^3 \\ & - \left(\frac{5}{144} - \frac{11}{12}\zeta_3 \right) \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} + \left(\frac{2}{9} - \frac{13}{6}\zeta_3 \right) \frac{d_F^{abcd} d_A^{abcd}}{N_A} n_f - \left(\frac{11}{36} - \frac{2}{3}\zeta_3 \right) \frac{d_F^{abcd} d_F^{abcd}}{N_A} n_f^2. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Пятый коэффициент β -функции $SU(N_c)$ КХД в $\overline{\text{MS}}$ -схеме имеет довольно громоздкую форму [58, 59]. Для наших целей достаточно знать вид этого коэффициента для частного случая $SU(3)$ -группы [57]:

$$\begin{aligned} \beta_4 = & \frac{8157455}{16384} + \frac{621885}{2048}\zeta_3 - \frac{88209}{2048}\zeta_4 - \frac{144045}{512}\zeta_5 \\ & + \left(-\frac{336460813}{1990656} - \frac{1202791}{20736}\zeta_3 + \frac{33935}{6144}\zeta_4 + \frac{1358995}{27648}\zeta_5 \right) n_f \\ & + \left(\frac{25960913}{198656} + \frac{698531}{82944}\zeta_3 - \frac{5263}{4608}\zeta_4 - \frac{5965}{1296}\zeta_5 \right) n_f^2 \\ & - \left(\frac{630559}{5971968} + \frac{24361}{124416}\zeta_3 - \frac{809}{13824}\zeta_4 - \frac{115}{2304}\zeta_5 \right) n_f^3 + \left(\frac{1205}{2985984} - \frac{19}{10368}\zeta_3 \right) n_f^4. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Решая РГ уравнение (1.17) с точностью до шестого порядка ТВ

$$\ln \frac{\mu^2}{\bar{\mu}^2} = \int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(\bar{\mu}^2)} \frac{dx}{\beta_0 x^2 + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^4 + \beta_3 x^5 + \beta_4 x^6 + \beta_5 x^7}, \quad (\text{A.6})$$

находим следующее разложение константы связи $a_s(\tilde{\mu}^2)$:

$$\begin{aligned}
a_s(\tilde{\mu}^2) &= a_s(\mu^2) + \sum_{n=1}^6 \theta_n a_s^{n+1}(\mu^2), \tag{A.7} \\
\theta_1 &= \beta_0 l, \quad \theta_2 = \beta_0^2 l^2 + \beta_1 l, \quad \theta_3 = \beta_0^3 l^3 + \frac{5}{2} \beta_0 \beta_1 l^2 + \beta_2 l, \\
\theta_4 &= \beta_0^4 l^4 + \frac{13}{3} \beta_0^2 \beta_1 l^3 + \left(3\beta_0 \beta_2 + \frac{3}{2} \beta_1^2 \right) l^2 + \beta_3 l, \\
\theta_5 &= \beta_0^5 l^5 + \frac{77}{12} \beta_0^3 \beta_1 l^4 + \left(6\beta_0^2 \beta_2 + \frac{35}{6} \beta_0 \beta_1^2 \right) l^3 + \frac{7}{2} \left(\beta_0 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 \right) l^2 + \beta_4 l, \\
\theta_6 &= \beta_0^6 l^6 + \frac{87}{10} \beta_0^4 \beta_1 l^5 + \left(10\beta_0^3 \beta_2 + \frac{85}{6} \beta_0^2 \beta_1^2 \right) l^4 \\
&\quad + \left(8\beta_0^2 \beta_3 + \frac{46}{3} \beta_0 \beta_1 \beta_2 + \frac{5}{2} \beta_1^3 \right) l^3 + (4\beta_0 \beta_4 + 4\beta_1 \beta_3 + 2\beta_2^2) l^2 + \beta_5 l,
\end{aligned}$$

где $l = \ln(\mu^2/\tilde{\mu}^2)$, а шестипетлевой коэффициент β_5 пока ещё неизвестен.

Данное ниже решение РГ уравнений для определения зависимости бегущей в $\overline{\text{MS}}$ -схеме массы $\overline{m}_q(\mu^2)$ от масштаба μ^2 в $\mathcal{O}(a_s^6)$ порядке ТВ относится к Главе 3.

Производя интегрирование в уравнении (3.21) на шестипетлевом уровне и используя разложение (A.7)

$$\frac{\overline{m}_q(\tilde{\mu}^2)}{\overline{m}_q(\mu^2)} = \exp\left(\int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(\tilde{\mu}^2)} dx \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + \gamma_5 x^5}{\beta_0 x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \beta_3 x^4 + \beta_4 x^5 + \beta_5 x^6} \right) = 1 + \sum_{n=1}^6 b_n a_s^n(\mu^2), \tag{A.8}$$

находим коэффициенты b_n в (A.8):

$$\begin{aligned}
b_1 &= \gamma_0 l, \quad b_2 = \frac{\gamma_0}{2} (\beta_0 + \gamma_0) l^2 + \gamma_1 l, \\
b_3 &= \frac{\gamma_0}{3} (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{2} \right) l^3 + \left(\beta_1 \frac{\gamma_0}{2} + \gamma_1 \beta_0 + \gamma_1 \gamma_0 \right) l^2 + \gamma_2 l, \\
b_4 &= \frac{\gamma_0}{4} (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{2} \right) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{3} \right) l^4 + \left(\frac{5}{6} \beta_1 \beta_0 \gamma_0 + \frac{\beta_1 \gamma_0^2}{2} + \gamma_1 (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{2} \right) \right) l^3 \\
&\quad + \left(\beta_2 \frac{\gamma_0}{2} + \gamma_1 \beta_1 + \frac{\gamma_1^2}{2} + \frac{3}{2} \gamma_2 \beta_0 + \gamma_2 \gamma_0 \right) l^2 + \gamma_3 l, \\
b_5 &= \frac{\gamma_0}{5} (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{2} \right) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{3} \right) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{4} \right) l^5 \\
&\quad + \left(\gamma_1 \beta_0^3 + \frac{13}{12} \gamma_0 \beta_1 \beta_0^2 + \frac{13}{12} \gamma_0^2 \beta_1 \beta_0 + \frac{11}{6} \gamma_0 \gamma_1 \beta_0^2 + \gamma_0^2 \gamma_1 \beta_0 + \frac{1}{4} \beta_1 \gamma_0^3 + \frac{1}{6} \gamma_1 \gamma_0^3 \right) l^4 \\
&\quad + \left(\gamma_0 \beta_2 \beta_0 + 2\gamma_0 \beta_0 \gamma_2 + \frac{7}{3} \gamma_1 \beta_1 \beta_0 + \frac{3}{2} \gamma_0 \gamma_1 \beta_1 + \frac{1}{2} \gamma_0 \beta_1^2 + 2\beta_0^2 \gamma_2 + \beta_0 \gamma_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_0^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_0^2 \right) l^3 + \left(\frac{1}{2} \gamma_0 \beta_3 + \gamma_1 \beta_2 + \frac{3}{2} \beta_1 \gamma_2 + 2\beta_0 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_0 \gamma_3 \right) l^2 + \gamma_4 l,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_6 = & \frac{\gamma_0}{6}(\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{2} \right) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{3} \right) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{4} \right) \left(\beta_0 + \frac{\gamma_0}{5} \right) l^6 \\
& + \left(\frac{1}{12} \beta_1 \gamma_0^4 + \gamma_1 \beta_0^4 + \frac{1}{24} \gamma_1 \gamma_0^4 + \frac{5}{3} \beta_0^2 \beta_1 \gamma_0^2 + \frac{35}{24} \beta_0^2 \gamma_0^2 \gamma_1 + \frac{2}{3} \beta_0 \beta_1 \gamma_0^3 + \frac{77}{60} \beta_0^3 \beta_1 \gamma_0 \right. \\
& + \left. \frac{5}{12} \beta_0 \gamma_0^3 \gamma_1 + \frac{25}{12} \beta_0^3 \gamma_0 \gamma_1 \right) l^5 + \left(\frac{1}{4} \beta_2 \gamma_0^3 + \frac{5}{2} \beta_0^3 \gamma_2 + \frac{1}{6} \gamma_0^3 \gamma_2 + \frac{3}{2} \beta_0^2 \gamma_1^2 + \frac{5}{8} \beta_1^2 \gamma_0^2 + \frac{1}{4} \gamma_0^2 \gamma_1^2 \right. \\
& + \left. \frac{35}{24} \beta_0 \beta_1^2 \gamma_0 + \frac{5}{4} \beta_0 \beta_2 \gamma_0^2 + \frac{47}{12} \beta_0^2 \beta_1 \gamma_1 + \frac{3}{2} \beta_0^2 \beta_2 \gamma_0 + \frac{5}{4} \beta_0 \gamma_0 \gamma_1^2 + \frac{5}{4} \beta_0 \gamma_0^2 \gamma_2 + \beta_1 \gamma_0^2 \gamma_1 \right. \\
& + \left. \frac{37}{12} \beta_0^2 \gamma_0 \gamma_2 + \frac{25}{6} \beta_0 \beta_1 \gamma_0 \gamma_1 \right) l^4 + \left(\beta_1 \gamma_1^2 + \frac{4}{3} \beta_1^2 \gamma_1 + \frac{1}{2} \beta_3 \gamma_0^2 + \frac{10}{3} \beta_0^2 \gamma_3 + \frac{1}{2} \gamma_0^2 \gamma_3 + \frac{1}{6} \gamma_1^3 \right. \\
& + \frac{9}{2} \beta_0 \beta_1 \gamma_2 + \frac{8}{3} \beta_0 \beta_2 \gamma_1 + \frac{7}{6} \beta_0 \beta_3 \gamma_0 + \frac{7}{6} \beta_1 \beta_2 \gamma_0 + \frac{5}{2} \beta_0 \gamma_0 \gamma_3 + \frac{5}{2} \beta_0 \gamma_1 \gamma_2 + 2 \beta_1 \gamma_0 \gamma_2 + \frac{3}{2} \beta_2 \gamma_0 \gamma_1 \\
& \left. + \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \right) l^3 + \left(\frac{1}{2} \gamma_2^2 + \frac{3}{2} \beta_2 \gamma_2 + \frac{5}{2} \beta_0 \gamma_4 + 2 \beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1 + \frac{1}{2} \beta_4 \gamma_0 + \gamma_0 \gamma_4 + \gamma_1 \gamma_3 \right) l^2 + \gamma_5 l,
\end{aligned}$$

где по-прежнему $l = \ln(\mu^2/\tilde{\mu}^2)$, коэффициенты $\gamma_0 - \gamma_4$ аномальной размерности массы известны в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, а шестипетлевой член γ_5 пока ещё не вычислен.

Приложение Б

Формулы пересчёта от одной схемы перенормировок к другой в случае зависимости от калибровки

Допустим, что нам известны зависящие от калибровочного параметра $\bar{\xi}$ коэффициенты $v_i(\bar{\xi})$ и $\omega_i(\bar{\xi})$, входящие в разложения:

$$a_s = \bar{a}_s \left(1 + v_1(\bar{\xi})\bar{a}_s + v_2(\bar{\xi})\bar{a}_s^2 + v_3(\bar{\xi})\bar{a}_s^3 + \mathcal{O}(\bar{a}_s^4) \right), \quad (\text{Б.1})$$

$$\xi = \bar{\xi} \left(1 + \omega_1(\bar{\xi})\bar{a}_s + \omega_2(\bar{\xi})\bar{a}_s^2 + \mathcal{O}(\bar{a}_s^3) \right), \quad (\text{Б.2})$$

где \bar{a}_s и $\bar{\xi}$ определены в некоторой произвольной (any scheme) $\overline{\text{AS}}$ -схеме перенормировок. Найдём аналогичные коэффициенты $b_i(\xi)$, $\eta_i(\xi)$, но в обратных разложениях:

$$\bar{a}_s = a_s \left(1 + b_1(\xi)a_s + b_2(\xi)a_s^2 + b_3(\xi)a_s^3 + \mathcal{O}(a_s^4) \right), \quad (\text{Б.3})$$

$$\bar{\xi} = \xi \left(1 + \eta_1(\xi)a_s + \eta_2(\xi)a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \right), \quad (\text{Б.4})$$

где a_s и ξ определены в другой AS-схеме перенормировок.

Подставляя вторую пару уравнений в первую и раскладывая полученные соотношения в ряд Тейлора, находим:

$$b_1(\xi) = -v_1(\xi), \quad \eta_1(\xi) = -\omega_1(\xi), \quad (\text{Б.5})$$

$$b_2(\xi) = -v_2(\xi) + 2v_1^2(\xi) + \xi\omega_1(\xi)\frac{dv_1(\xi)}{d\xi}, \quad (\text{Б.6})$$

$$\eta_2(\xi) = -\omega_2(\xi) + \omega_1^2(\xi) + \omega_1(\xi)v_1(\xi) + \xi\omega_1(\xi)\frac{d\omega_1(\xi)}{d\xi}, \quad (\text{Б.7})$$

$$b_3(\xi) = -v_3(\xi) + 5v_2(\xi)v_1(\xi) - 5v_1^3(\xi) + \xi\omega_1(\xi)\frac{dv_2(\xi)}{d\xi} - \frac{1}{2}\xi^2\omega_1^2(\xi)\frac{d^2v_1(\xi)}{d\xi^2} + \xi\frac{dv_1(\xi)}{d\xi} \left(\omega_2(\xi) - \omega_1^2(\xi) - 5\omega_1(\xi)v_1(\xi) - \xi\omega_1(\xi)\frac{d\omega_1(\xi)}{d\xi} \right). \quad (\text{Б.8})$$

Применительно к схемам, рассмотренным в диссертации, (без ограничения общности) под $\overline{\text{AS}}$ -схемой мы подразумеваем $\overline{\text{MS}}$ -схему, а под AS — калибровочно-неинвариантные mMOM или MOMgggg-схемы.

Приложение В

Частичная факторизация β -функции в mMOM-схеме при $\xi = -3, -1$ в четвёртом порядке теории возмущений

Как описано во второй главе свойство факторизации β -функции в члене Δ_{csb} , нарушающем конформную симметрию и входящем в обобщённое соотношение Крютера, остаётся справедливым в четвёртом порядке ТВ только при выполнении условия (2.15). Выпишем его не зависящую от K_3 часть в mMOM-схеме при $\xi = -3$ и вычислим её в явном виде, используя полученные результаты (1.120-1.123), (1.131-1.134), (1.116-1.117):

$$\begin{aligned}
 d_4 + c_4 + d_1 c_3 + c_1 d_3 + d_2 c_2 + \beta_1 K_2 + \beta_2 K_1 \Big|_{\xi=-3}^{\text{mMOM}} = & \quad (B.1) \\
 & \left[-\frac{27181}{9216} - \frac{671}{96} \zeta_3 + \frac{7865}{96} \zeta_5 - \frac{1155}{16} \zeta_7 \right] C_F^3 C_A + \left[\frac{2471}{2304} + \frac{61}{24} \zeta_3 - \frac{715}{24} \zeta_5 \right. \\
 & \left. + \frac{105}{4} \zeta_7 \right] C_F^3 T_F n_f - \left[\frac{747967}{27648} + \frac{20405}{384} \zeta_3 - \frac{10505}{144} \zeta_5 - \frac{385}{32} \zeta_7 \right] C_F^2 C_A^2 - \left[\frac{1273}{432} \right. \\
 & \left. + \frac{599}{72} \zeta_3 - \frac{25}{2} \zeta_5 \right] C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \left[\frac{10031531}{110592} - \frac{376445}{9216} \zeta_3 - \frac{32725}{576} \zeta_5 + \frac{4499}{384} \zeta_3^2 \right] C_F C_A^3 \\
 & + \left[-\frac{49}{18} + \frac{7}{6} \zeta_3 + \frac{5}{3} \zeta_5 \right] C_F T_F^3 n_f^3 + \left[\frac{124009}{6912} + \frac{6077}{144} \zeta_3 - \frac{4385}{72} \zeta_5 \right. \\
 & \left. - \frac{35}{8} \zeta_7 \right] C_F^2 C_A T_F n_f - \left[\frac{2499749}{27648} - \frac{27673}{768} \zeta_3 - \frac{2825}{48} \zeta_5 + \frac{629}{96} \zeta_3^2 \right] C_F C_A^2 T_F n_f \\
 & + \left[\frac{12245}{432} - \frac{1567}{144} \zeta_3 - \frac{665}{36} \zeta_5 + \frac{5}{6} \zeta_3^2 \right] C_F C_A T_F^2 n_f^2.
 \end{aligned}$$

Распишем разложение коэффициента K_3 по цветовым факторам согласно (2.11), (2.44), (2.50) с неизвестными коэффициентами $\theta_1 - \theta_6$:

$$K_3 = \theta_1 C_F^3 + \theta_2 C_F^2 C_A + \theta_3 C_F C_A^2 + \theta_4 C_F^2 T_F n_f + \theta_5 C_F C_A T_F n_f + \theta_6 C_F T_F^2 n_f^2. \quad (B.2)$$

В соответствии с (2.15) в случае наличия факторизации выражение (B.1) должно быть равно $-\beta_0 K_{3, \xi=-3}^{\text{mMOM}}$:

$$\begin{aligned}
 -\beta_0 K_3 = & -\frac{11}{12} \theta_1 C_F^3 C_A - \frac{11}{12} \theta_2 C_F^2 C_A^2 - \frac{11}{12} \theta_3 C_F C_A^3 + \frac{1}{3} \theta_1 C_F^3 T_F n_f \\
 & + \left(\frac{1}{3} \theta_2 - \frac{11}{12} \theta_4 \right) C_F^2 C_A T_F n_f + \left(\frac{1}{3} \theta_3 - \frac{11}{12} \theta_5 \right) C_F C_A^2 T_F n_f \\
 & + \left(\frac{1}{3} \theta_5 - \frac{11}{12} \theta_6 \right) C_F C_A T_F^2 n_f^2 + \frac{1}{3} \theta_4 C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \frac{1}{3} \theta_6 C_F T_F^3 n_f^3.
 \end{aligned} \quad (B.3)$$

Приравнивая оба этих вклада, получаем:

$$\begin{aligned}
\theta_1^{\xi=-3} &= \frac{2471}{768} + \frac{61}{8}\zeta_3 - \frac{715}{8}\zeta_5 + \frac{315}{4}\zeta_7, \\
\theta_2^{\xi=-3} &= \frac{67997}{2304} + \frac{1855}{32}\zeta_3 - \frac{955}{12}\zeta_5 - \frac{105}{8}\zeta_7, \\
\theta_3^{\xi=-3} &= -\frac{10031531}{101376} + \frac{376445}{8448}\zeta_3 + \frac{2975}{48}\zeta_5 - \frac{409}{32}\zeta_7^2, \\
\theta_4^{\xi=-3} &= -\frac{1273}{144} - \frac{599}{24}\zeta_3 + \frac{75}{2}\zeta_5, \\
\theta_6^{\xi=-3} &= -\frac{49}{6} + \frac{7}{2}\zeta_3 + 5\zeta_5.
\end{aligned}$$

Коэффициент θ_5 входит в две цветовые структуры в (B.3) — в $C_F C_A^2 T_F n_f$ и $C_F C_A T_F^2 n_f^2$. Полученная приравниванием соотношений (B.1) и (B.3) система двух уравнений, содержащая коэффициент θ_5 , не совместна. Данный факт свидетельствует об отсутствии β -факторизации в ОСК в mМOM-схеме в калибровке анти-Йенни. Однако, нарушение этой факторизации наблюдается лишь для одного (пропорционального $C_F C_A T_F n_f$) из шести возможных коэффициентов в структуре K_3 -члена. Поэтому мы говорим о наличии *частичной* факторизации [27].

В случае антифейнмановской калибровки ситуация полностью аналогична с той лишь разницей, что коэффициент θ_3 имеет другой аналитический вид:

$$\begin{aligned}
\theta_1^{\xi=-1} &= \theta_1^{\xi=-3}, \quad \theta_2^{\xi=-1} = \theta_2^{\xi=-3}, \quad \theta_4^{\xi=-1} = \theta_4^{\xi=-3}, \quad \theta_6^{\xi=-1} = \theta_6^{\xi=-3}, \\
\theta_3^{\xi=-1} &= -\frac{1287481}{12672} + \frac{26255}{528}\zeta_3 + \frac{2975}{48}\zeta_5 - \frac{335}{22}\zeta_7^2.
\end{aligned}$$

Коэффициент $\theta_5^{\xi=-1}$ по-прежнему не может быть определён.

Приложение Г

Исследование устойчивости решений, полученных с помощью метода наименьших квадратов

1. По отношению к количеству неизвестных

Следуя разделу 3.2, работе [29] и полагая неизвестными все 4 коэффициента в разложении поправки t_4^M (3.27), а также принимая в расчёт вычисления данной поправки при фиксированных значениях n_l [208], приходим к следующей переопределённой системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 \\ 1 & 7 & 49 & 343 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \\ 1 & 9 & 81 & 729 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 11 & 121 & 1331 \\ 1 & 12 & 144 & 1728 \\ 1 & 13 & 169 & 2197 \\ 1 & 14 & 196 & 2744 \\ 1 & 15 & 225 & 3375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{4,0}^M \\ t_{4,1}^M \\ t_{4,2}^M \\ t_{4,3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1702.70 \pm 1.74 \\ 1235.66 \pm 1.77 \\ 839.14 \pm 1.80 \\ 509.07 \pm 1.84 \\ 241.37 \pm 1.87 \\ 31.99 \pm 1.91 \\ -123.15 \pm 1.94 \\ -228.12 \pm 1.98 \\ -286.98 \pm 2.01 \\ -303.81 \pm 2.05 \\ -282.68 \pm 2.08 \\ -227.64 \pm 2.12 \\ -142.78 \pm 2.16 \end{pmatrix} \quad (\Gamma.1)$$

В соответствии с методом наименьших квадратов вводим функцию Ψ — аналог функции (3.36) на случай с четырьмя неизвестными:

$$\Psi(t_{4,0}^M, t_{4,1}^M, t_{4,2}^M, t_{4,3}^M) = \sum_{s=1}^{13} (t_{4,0}^M + t_{4,1}^M n_{l_s} + t_{4,2}^M n_{l_s}^2 + t_{4,3}^M n_{l_s}^3 - f_{l_s})^2, \quad (\Gamma.2)$$

где f_{l_s} — числа, представленные в столбце свободных членов с их теоретическими погрешностями вычислений Δf_{l_s} .

Решение системы (Г.1) определяется из условий:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_{4,0}^M} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_{4,1}^M} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_{4,2}^M} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t_{4,3}^M} = 0. \quad (\Gamma.3)$$

Требования (Г.3) приводят к следующей системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 13 & 117 & 1235 & 14391 \\ 117 & 1235 & 14391 & 178295 \\ 1235 & 14391 & 178295 & 2299167 \\ 14391 & 178295 & 2299167 & 30482855 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{4,0}^M \\ t_{4,1}^M \\ t_{4,2}^M \\ t_{4,3}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2964.77 \\ 50.82 \\ -147501.86 \\ -2513349.48 \end{pmatrix} \quad (\text{Г.4})$$

с симметричной положительно-определённой матрицей G с $\det(G) = 97538785344$.

Погрешности полученных решений системы (Г.4) могут быть найдены из обобщения формул (3.39) и (3.40) на случай 4 неизвестных:

$$\Delta t_{4,0}^M = \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \left(\frac{\partial t_{4,0}^M}{\partial f_{l_s}} \Delta f_{l_s} \right)^2} = \frac{1}{\det(G)} \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \Delta f_{l_s}^2 \det \begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ n_{l_s} & c_2 & c_3 & c_4 \\ n_{l_s}^2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ n_{l_s}^3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}}, \quad (\text{Г.5})$$

$$\Delta t_{4,1}^M = \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \left(\frac{\partial t_{4,1}^M}{\partial f_{l_s}} \Delta f_{l_s} \right)^2} = \frac{1}{\det(G)} \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \Delta f_{l_s}^2 \det \begin{pmatrix} c_0 & 1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & n_{l_s} & c_3 & c_4 \\ c_2 & n_{l_s}^2 & c_4 & c_5 \\ c_3 & n_{l_s}^3 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}}, \quad (\text{Г.6})$$

$$\Delta t_{4,2}^M = \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \left(\frac{\partial t_{4,2}^M}{\partial f_{l_s}} \Delta f_{l_s} \right)^2} = \frac{1}{\det(G)} \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \Delta f_{l_s}^2 \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & 1 & c_3 \\ c_1 & c_2 & n_{l_s} & c_4 \\ c_2 & c_3 & n_{l_s}^2 & c_5 \\ c_3 & c_4 & n_{l_s}^3 & c_6 \end{pmatrix}}, \quad (\text{Г.7})$$

$$\Delta t_{4,3}^M = \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \left(\frac{\partial t_{4,3}^M}{\partial f_{l_s}} \Delta f_{l_s} \right)^2} = \frac{1}{\det(G)} \sqrt{\sum_{s=1}^{13} \Delta f_{l_s}^2 \det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & n_{l_s} \\ c_2 & c_3 & c_4 & n_{l_s}^2 \\ c_3 & c_4 & c_5 & n_{l_s}^3 \end{pmatrix}}, \quad (\text{Г.8})$$

где $c_p = \sum_{j=1}^{13} n_{l_j}^p$.

Комбинирование решения системы (Г.4) и погрешностей (Г.5-Г.8) даёт следующий результат:

$$t_{4,0}^M = 3567.61 \pm 7.21, \quad t_{4,1}^M = -745.72 \pm 2.98, \quad t_{4,2}^M = 43.40 \pm 0.37, \quad t_{4,3}^M = -0.678 \pm 0.014. \quad (\text{Г.9})$$

Центральные значения для коэффициентов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ в (Г.9) совпадают с найденными нами ранее в (3.41) при помощи МНК с двумя неизвестными. Коэффициенты $t_{4,2}^M$ и $t_{4,3}^M$ в

(Г.9) воспроизводят известные результаты аналитических вычислений [199]. Погрешности представленных значений значительно выше, чем приведённые в (3.41). Однако, они не оказывают хоть сколько-нибудь заметного влияния на асимптотическое поведение соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков на четырёхпетлевом уровне.

2. По отношению к количеству уравнений

Рассмотрим теперь аналог системы (3.35) с тремя уравнениями при $n_l = 3, 4, 5$, соответствующими рассмотрению c , b и t -кварков. Посмотрим, к каким значениям коэффициентов $t_{4,0}^M$ и $t_{4,1}^M$ приведёт использование МНК в этом случае. Переопределённая система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{4,0}^M \\ t_{4,1}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1330.44 \pm 1.74 \\ 584.72 \pm 1.77 \\ -160.99 \pm 1.80 \end{pmatrix} \quad (\text{Г.10})$$

МНК-решение данной системы с соответствующими погрешностями равно:

$$t_{4,0}^M = 3567.58 \pm 5.08, \quad t_{4,1}^M = -745.72 \pm 1.25. \quad (\text{Г.11})$$

Как видно, данные выражения находятся в хорошем согласии как со значениями (3.41), так и с (Г.9).

Выполненный в этом разделе анализ свидетельствует в пользу того, что метод наименьших квадратов, применённый к задаче нахождения неизвестных в аналитическом виде четырёхпетлевых коэффициентов в $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношении, устойчив к изменению как количества неизвестных рассматриваемой переопределённой системы алгебраических уравнений, так и к количеству уравнений в этой системе.

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. Изд-во “Наука”, 1984 г. С. 601. Издание четвертое, исправленное.
2. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984. Т. 1 и 2. с. 448 и 400.
3. С. Вайнберг. Квантовая теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т. 1. Общая теория. 648 с.
4. С. Вайнберг. Квантовая теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. Т. 2. Современные приложения. 528 с.
5. Пескин М. Е., Шрёдер Д. В. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. С. 784.
6. Ф. Индурайн. Квантовая хромодинамика: Введение в теорию кварков и глюонов. М.: Мир, 1986. С. 288.
7. Л.Б. Окунь. Лептоны и кварки. М.: УРСС (3 изд.), 2005, 352 с.
8. Yang C.-N., Mills R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // Phys. Rev. 1954. Т. 96. С. 191–195. [150(1954); 150(1954); 150(1954)].
9. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе. К вопросу о составных моделях в теории элементарных частиц. 1965. Препринт ОИЯИ Д-1968, 12 с.
10. Han M. Y., Nambu Y. Three Triplet Model with Double SU(3) Symmetry // Phys. Rev. 1965. Т. 139. С. B1006–B1010. [187(1965)].
11. Gross D. J., Wilczek F. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories // Phys. Rev. Lett. 1973. Т. 30. С. 1343–1346. [271(1973)].
12. Politzer H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? // Phys. Rev. Lett. 1973. Т. 30. С. 1346–1349. [274(1973)].
13. DeGrand T., DeTar C. Lattice methods for Quantum Chromodynamics. Singapore, World Scientific, 364 p., 2006.
14. Иоффе Б. Л. Киральная эффективная теория сильных взаимодействий // Усп. физ. наук. 2001. Т. 171, № 12. С. 1273–1290.
15. Brambilla N., Vairo A. Quark confinement and the hadron spectrum // Strong interactions at low and intermediate energies. Proceedings, 13th Annual Hampton University Graduate Studies, HUGS’98, Newport News, USA, May 26–June 12, 1998. 1999. С. 151–220. hep-ph/9904330.
16. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations // Nucl. Phys. 1979. Т. B147. С. 385–447.

17. Bjorken J. D. Inelastic Scattering of Polarized Leptons from Polarized Nucleons // Phys. Rev. 1970. T. D1. C. 1376–1379.
18. Матвеев В. А., Мурадян Р. М., Тавхелидзе А. Н. Автомодельность, коммутаторы токов и векторная доминантность в глубоконеупругих лептон-адронных взаимодействиях. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра. Москва, АТОМИЗДАТ, 1971. Т. 2, выпуск 1, ЭЧАЯ.
19. The Pole mass of the heavy quark. Perturbation theory and beyond / I. I. Y. Bigi, M. A. Shifman, N. G. Uraltsev [и др.] // Phys. Rev. 1994. T. D50. C. 2234–2246.
20. Beneke M., Braun V. M. Heavy quark effective theory beyond perturbation theory: Renormalons, the pole mass and the residual mass term // Nucl. Phys. 1994. T. B426. C. 301–343.
21. Ball P., Beneke M., Braun V. M. Resummation of $(\beta_0\alpha_s)^n$ corrections in QCD: Techniques and applications to the tau hadronic width and the heavy quark pole mass // Nucl. Phys. 1995. T. B452. C. 563–625.
22. On the ultimate uncertainty of the top quark pole mass / M. Beneke, P. Marquard, P. Nason [и др.] // Phys. Lett. 2017. T. B775. C. 63–70.
23. Pineda A. Determination of the bottom quark mass from the Upsilon(1S) system // JHEP. 2001. T. 06. C. 022.
24. Ayala C., Cvetič G., Pineda A. The bottom quark mass from the $\Upsilon(1S)$ system at NNNLO // JHEP. 2014. T. 09. C. 045.
25. Kataev A. L., Molokoedov V. S. Fourth-order QCD renormalization group quantities in the V scheme and the relation of the β function to the Gell-Mann–Low function in QED // Phys. Rev. 2015. T. D92, № 5. C. 054008.
26. Kataev A. L., Molokoedov V. S. On the flavour dependence of the $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ correction to the relation between running and pole heavy quark masses // Eur. Phys. J. Plus. 2016. T. 131, № 8. C. 271.
27. Garkusha A. V., Kataev A. L., Molokoedov V. S. Renormalization scheme and gauge (in)dependence of the generalized Crewther relation: what are the real grounds of the β -factorization property? // JHEP. 2018. T. 02. C. 161.
28. Kataev A. L., Molokoedov V. S. Dependence of Five- and Six-Loop Estimated QCD Corrections to the Relation between Pole and Running Masses of Heavy Quarks on the Number of Light Flavors // JETP Lett. 2018. T. 108, № 12. C. 777–782.
29. Kataev A. L., Molokoedov V. S. Least Squares Method: Application to Analysis of the Flavor Dependence of the QCD Relation Between Pole and Scheme Running Heavy Quark Masses //

- Theor. Math. Phys. 2019. T. 200, № 3. C. 1374–1382. [Teor. Mat. Fiz.200,no.3,522(2019)].
30. Kataev A. L., Molokoedov V. S. From perturbative calculations of the QCD static potential towards four-loop pole-running heavy quarks masses relation // J. Phys. Conf. Ser. 2016. T. 762, № 1. C. 012078.
 31. Kataev A. L., Molokoedov V. S. The analytical $\mathcal{O}(a_s^4)$ expression for the polarized Bjorken sum rule in the miniMOM scheme and the consequences for the generalized Crewther relation // J. Phys. Conf. Ser. 2017. T. 938, № 1. C. 012050.
 32. Kataev A. L., Molokoedov V. S. On the relation between pole and running heavy quark masses beyond the four-loop approximation // EPJ Web Conf. 2018. T. 191. C. 04005.
 33. Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories / W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke [и др.] // Phys. Rev. 1978. T. D18. C. 3998.
 34. 't Hooft G. Dimensional regularization and the renormalization group // Nucl. Phys. 1973. T. B61. C. 455–468.
 35. 't Hooft G., Veltman M. J. G. Regularization and Renormalization of Gauge Fields // Nucl. Phys. 1972. T. B44. C. 189–213.
 36. Jackiw R., Preparata G. Probes for the constituents of the electromagnetic current and anomalous commutators // Phys. Rev. Lett. 1969. T. 22. C. 975–977.
 37. Cabibbo N., Parisi G., Testa M. Hadron Production in e^+e^- Collisions // Lett. Nuovo Cim. 1970. T. 4S1. C. 35–39. [Lett. Nuovo Cim.4,35(1970)].
 38. Zee A. Electron positron annihilation in stagnant field theories // Phys. Rev. 1973. T. D8. C. 4038–4041.
 39. Appelquist T., Georgi H. e^+e^- annihilation in gauge theories of strong interactions // Phys. Rev. 1973. T. D8. C. 4000–4002.
 40. Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V. Higher Order Corrections to $\sigma_t(e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons})$ in Quantum Chromodynamics // Phys. Lett. 1979. T. 85B. C. 277–279.
 41. Dine M., Sapiirstein J. R. Higher Order QCD Corrections in e^+e^- Annihilation // Phys. Rev. Lett. 1979. T. 43. C. 668.
 42. Celmaster W., Gonsalves R. J. An Analytic Calculation of Higher Order Quantum Chromodynamic Corrections in e^+e^- Annihilation // Phys. Rev. Lett. 1980. T. 44. C. 560.
 43. Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A. The $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ -corrections to $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$ and $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$ in QCD // Phys. Lett. 1991. T. B259. C. 144–150.
 44. Surguladze L. R., Samuel M. A. Total hadronic cross-section in e^+e^- annihilation at the four loop level of perturbative QCD // Phys. Rev. Lett. 1991. T. 66. C. 560–563. [Erratum: Phys. Rev. Lett.66,2416(1991)].

45. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H. Order α_s^4 QCD Corrections to Z and tau Decays // Phys. Rev. Lett. 2008. T. 101. C. 012002.
46. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H. Adler Function, Bjorken Sum Rule, and the Crewther Relation to Order α_s^4 in a General Gauge Theory // Phys. Rev. Lett. 2010. T. 104. C. 132004.
47. On Higgs decays to hadrons and the R-ratio at N⁴LO / F. Herzog, B. Ruijl, T. Ueda [и др.] // JHEP. 2017. T. 08. C. 113.
48. Adler Function, Sum Rules and Crewther Relation of Order $O(\alpha_s^4)$: the Singlet Case / P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn [и др.] // Phys. Lett. 2012. T. B714. C. 62–65.
49. Adler S. L. Some Simple Vacuum Polarization Phenomenology: $e^+e^- \rightarrow$ Hadrons: The μ -Mesic Atom x-Ray Discrepancy and $(g - 2)$ of the Muon // Phys. Rev. 1974. T. D10. C. 3714. [445(1974)].
50. Jones D. R. T. Two Loop Diagrams in Yang-Mills Theory // Nucl. Phys. 1974. T. B75. C. 531.
51. Caswell W. E. Asymptotic Behavior of Nonabelian Gauge Theories to Two Loop Order // Phys. Rev. Lett. 1974. T. 33. C. 244.
52. Egorian E., Tarasov O. V. Two Loop Renormalization of the QCD in an Arbitrary Gauge // Teor. Mat. Fiz. 1979. T. 41. C. 26–32. [Theor. Math. Phys.41,863(1979)].
53. Tarasov O. V., Vladimirov A. A., Zharkov A. Yu. The Gell-Mann-Low Function of QCD in the Three Loop Approximation // Phys. Lett. 1980. T. 93B. C. 429–432.
54. Larin S. A., Vermaseren J. A. M. The Three loop QCD Beta function and anomalous dimensions // Phys. Lett. 1993. T. B303. C. 334–336.
55. van Ritbergen T., Vermaseren J. A. M., Larin S. A. The Four loop beta function in quantum chromodynamics // Phys. Lett. 1997. T. B400. C. 379–384.
56. Czakon M. The Four-loop QCD beta-function and anomalous dimensions // Nucl. Phys. 2005. T. B710. C. 485–498.
57. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kühn J. H. Five-Loop Running of the QCD coupling constant // Phys. Rev. Lett. 2017. T. 118, № 8. C. 082002.
58. The five-loop beta function of Yang-Mills theory with fermions / F. Herzog, B. Ruijl, T. Ueda [и др.] // JHEP. 2017. T. 02. C. 090.
59. The five-loop Beta function for a general gauge group and anomalous dimensions beyond Feynman gauge / T. Luthe, A. Maier, P. Marquard [и др.] // JHEP. 2017. T. 10. C. 166.
60. Kataev A. L., Starshenko V. V. Estimates of the higher order QCD corrections to R(s), R(tau) and deep inelastic scattering sum rules // Mod. Phys. Lett. 1995. T. A10. C. 235–250.

61. Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G. Higher-order QCD perturbation theory in different schemes: From FOPT to CIPT to FAPT // JHEP. 2010. T. 06. C. 085.
62. Nesterenko A. V. Electron–positron annihilation into hadrons at the higher-loop levels // Eur. Phys. J. 2017. T. C77, № 12. C. 844.
63. Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A. The Width of Higgs Boson Decay Into Hadrons: Three Loop Corrections of Strong Interactions // Sov. J. Nucl. Phys. 1984. T. 40. C. 329–334. [Yad. Fiz.40,517(1984)].
64. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kuhn J. H. Scalar correlator at $O(\alpha_s^4)$, Higgs decay into b-quarks and bounds on the light quark masses // Phys. Rev. Lett. 2006. T. 96. C. 012003.
65. Krasnikov N. V., Pivovarov A. A. The influence of the analytical continuation effects on the value of the QCD scale parameter lambda extracted from the data on charmonium and upsilon hadron decays // Phys. Lett. 1982. T. 116B. C. 168–170.
66. Radyushkin A. V. Optimized Λ - Parametrization for the QCD Running Coupling Constant in Space - Like and Time - Like Regions // JINR Rapid Commun. 1996. T. 78. JINR-E2-82-159, JINR-RAPID-COMMUNICATIONS-4[78]-96, 9-(1996). C. 96–99.
67. Shirkov D. V., Solovtsov I. L. Analytic model for the QCD running coupling with universal $\alpha_s(0)$ value // Phys. Rev. Lett. 1997. T. 79. C. 1209–1212.
68. Solovtsov I. L., Shirkov D. V. Analytic approach to perturbative QCD and renormalization scheme dependence // Phys. Lett. 1998. T. B442. C. 344–348.
69. Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G. Fractional Analytic Perturbation Theory in Minkowski space and application to Higgs boson decay into a b anti-b pair // Phys. Rev. 2007. T. D75. C. 056005. [Erratum: Phys. Rev.D77,079901(2008)].
70. Bjorken J. D. Applications of the Chiral $U(6) \times (6)$ Algebra of Current Densities // Phys. Rev. 1966. T. 148. C. 1467–1478.
71. Patrignani C. [и др.]. Review of Particle Physics // Chin. Phys. 2016. T. C40, № 10. C. 100001.
72. Teryaev O. V., Veretin O. L. Quark mass corrections to the Bjorken and Gross-Llewellyn-Smith sum rules. Preprint hep-ph/9602362. 1996.
73. Blumlein J., van Neerven W. L. Heavy flavor contributions to the deep inelastic scattering sum rules // Phys. Lett. 1999. T. B450. C. 417–426.
74. Shuryak E. V., Vainshtein A. I. Theory of Power Corrections to Deep Inelastic Scattering in Quantum Chromodynamics. 2. Q^4 Effects: Polarized Target // Nucl. Phys. 1982. T. B201, № IYF-81-106. C. 141.
75. Balitsky I. I., Braun V. M., Kolesnichenko A. V. Power corrections $1/Q^2$ to parton sum rules

- for deep inelastic scattering from polarized targets // Phys. Lett. 1990. T. B242. C. 245–250. [Erratum: Phys. Lett.B318,648(1993)].
76. Kataev A. L. Deep inelastic sum rules at the boundaries between perturbative and nonperturbative QCD // Mod. Phys. Lett. 2005. T. A20. C. 2007–2022. [Frascati Phys. Ser.39,211(2005)].
 77. Pasechnik R. S., Shirkov D. V., Teryaev O. V. Bjorken Sum Rule and pQCD frontier on the move // Phys. Rev. 2008. T. D78. C. 071902.
 78. QCD Higher Order Effects in Spin Dependent Deep Inelastic Electroproduction / J. Kodaira, S. Matsuda, K. Sasaki [и др.] // Nucl. Phys. 1979. T. B159. C. 99–124.
 79. The Burkhardt-Cottingham sum rule in perturbative QCD / G. Altarelli, B. Lampe, P. Nason [и др.] // Phys. Lett. 1994. T. B334. C. 187–191.
 80. Belitsky A. V., Efremov A. V., Teryaev O. V. Gluon contribution to the transverse spin structure function g_2 // Phys. Atom. Nucl. 1995. T. 58. C. 1253–1257. [Yad. Fiz.58,1333(1995)].
 81. Gorishnii S. G., Larin S. A. QCD Corrections to the Parton Model Rules for Structure Functions of Deep Inelastic Scattering // Phys. Lett. 1986. T. B172. C. 109–112.
 82. Larin S. A., Vermaseren J. A. M. The α_s^3 corrections to the Bjorken sum rule for polarized electroproduction and to the Gross-Llewellyn Smith sum rule // Phys. Lett. 1991. T. B259. C. 345–352.
 83. Gorishnii S. G., Larin S. A., Tkachov F. V. The algorithm for OPE coefficient functions in the MS scheme // Phys. Lett. 1983. T. 124B. C. 217–220.
 84. Larin S. A. The singlet contribution to the Bjorken sum rule for polarized deep inelastic scattering // Phys. Lett. 2013. T. B723. C. 348–350.
 85. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kühn J. H. Massless Propagators, $R(s)$ and Multiloop QCD // Nucl. Part. Phys. Proc. 2015. T. 261-262. C. 3–18.
 86. Calibrating the Naive Cornell Model with NRQCD / V. Mateu, P. G. Ortega, D. R. Entem [и др.] // Eur. Phys. J. 2019. T. C79, № 4. C. 323.
 87. Kiselev V. V., Kovalsky A. E., Onishchenko A. I. Heavy quark potential in the static limit of QCD // Phys. Rev. 2001. T. D64. C. 054009.
 88. Static potentials and glueball masses from QCD simulations with Wilson sea quarks / G. S. Bali, B. Bolder, N. Eicker [и др.] // Phys. Rev. 2000. T. D62. C. 054503.
 89. Effective Field Theories for Heavy Quarkonium / N. Brambilla, A. Pineda, J. Soto [и др.] // Rev. Mod. Phys. 2005. T. 77. C. 1423.
 90. Koma Y., Koma M. Spin-dependent potentials from lattice QCD // Nucl. Phys. 2007. T.

- B769. С. 79–107.
91. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Изд-во “Наука”, 1989. Т. 4. Издание третье, исправленное. С. 723.
 92. Wilson K. G. Confinement of Quarks // Phys. Rev. 1974. Т. D10. С. 2445–2459. [45(1974); 319(1974)].
 93. Fischler W. Quark - anti-Quark Potential in QCD // Nucl. Phys. 1977. Т. B129. С. 157–174.
 94. Billoire A. How Heavy Must Be Quarks in Order to Build Coulombic q anti- q Bound States // Phys. Lett. 1980. Т. 92B. С. 343–347.
 95. Schroder Y. The Static potential in QCD to two loops // Phys. Lett. 1999. Т. B447. С. 321–326.
 96. Peter M. The Static quark - anti-quark potential in QCD to three loops // Phys. Rev. Lett. 1997. Т. 78. С. 602–605.
 97. Smirnov A. V., Smirnov V. A., Steinhauser M. Fermionic contributions to the three-loop static potential // Phys. Lett. 2008. Т. B668. С. 293–298.
 98. Smirnov A. V., Smirnov V. A., Steinhauser M. Three-loop static potential // Phys. Rev. Lett. 2010. Т. 104. С. 112002.
 99. Anzai C., Kiyo Y., Sumino Y. Static QCD potential at three-loop order // Phys. Rev. Lett. 2010. Т. 104. С. 112003.
 100. Analytic three-loop static potential / R. N. Lee, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov [и др.] // Phys. Rev. 2016. Т. D94, № 5. С. 054029.
 101. Gorishnii S. G., Kataev A. L., Larin S. A. The three loop QED contributions to the photon vacuum polarization function in the $\overline{\text{MS}}$ scheme and the four loop corrections to the QED beta function in the on-shell scheme // Phys. Lett. 1991. Т. B273. С. 141–144. [Erratum: Phys. Lett. B341,448(1995)].
 102. Seligman W. G. [и др.]. Improved determination of α_s from neutrino nucleon scattering // Phys. Rev. Lett. 1997. Т. 79. С. 1213–1216.
 103. Decamp D. [и др.]. A Precise Determination of the Number of Families With Light Neutrinos and of the Z Boson Partial Widths // Phys. Lett. 1990. Т. B235. С. 399–411.
 104. Alcaraz J. [и др.]. Precision Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model. 2007.
 105. Kataev A. L., Parente G., Sidorov A. V. Higher twists and $\alpha_s(M_Z)$ extractions from the NNLO QCD analysis of the CCFR data for the xF_3 structure function // Nucl. Phys. 2000. Т. B573. С. 405–433.
 106. Potential NRQCD and heavy quarkonium spectrum at next-to-next-to-next-to-leading

- order / B. A. Kniehl, A. A. Penin, V. A. Smirnov [и др.] // Nucl. Phys. 2002. Т. B635. С. 357–383.
107. The Infrared behavior of the static potential in perturbative QCD / N. Brambilla, A. Pineda, J. Soto [и др.] // Phys. Rev. 1999. Т. D60. С. 091502.
108. Melles M. The Static QCD potential in coordinate space with quark masses through two loops // Phys. Rev. 2000. Т. D62. С. 074019.
109. Recksiegel S., Sumino Y. Perturbative QCD potential, renormalon cancellation and phenomenological potentials // Phys. Rev. 2002. Т. D65. С. 054018.
110. Brodsky S. J., Melles M., Rathsman J. The Two loop scale dependence of the static QCD potential including quark masses // Phys. Rev. 1999. Т. D60. С. 096006.
111. Mass spectra of doubly heavy Omega QQ' baryons / V. V. Kiselev, A. K. Likhoded, O. N. Pakhomova [и др.] // Phys. Rev. 2002. Т. D66. С. 034030.
112. Grunberg G. Renormalization Group Improved Perturbative QCD // Phys. Lett. 1980. Т. 95B. С. 70. [Erratum: Phys. Lett.110B,501(1982)].
113. Krasnikov N. V. Analyticity and Renormalization Group // Nucl. Phys. 1981. Т. B192. С. 497–508. [Yad. Fiz.35,1594(1982)].
114. Grunberg G. Renormalization Scheme Independent QCD and QED: The Method of Effective Charges // Phys. Rev. 1984. Т. D29. С. 2315–2338.
115. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. Изд-во “Наука”, Москва 1973. Т. 1. Издание второе, стереотипное. С. 296.
116. Blümlein J. Structural Relations of Harmonic Sums and Mellin Transforms at Weight $w = 6$ // Clay Math. Proc. 2010. Т. 12. С. 167–188.
117. Vermaseren J. A. M. Harmonic sums, Mellin transforms and integrals // Int. J. Mod. Phys. 1999. Т. A14. С. 2037–2076.
118. Kalmykov M. Yu., Ward B. F. L., Yost S. A. Multiple (inverse) binomial sums of arbitrary weight and depth and the all-order epsilon-expansion of generalized hypergeometric functions with one half-integer value of parameter // JHEP. 2007. Т. 10. С. 048.
119. Blumlein J., Broadhurst D. J., Vermaseren J. A. M. The Multiple Zeta Value Data Mine // Comput. Phys. Commun. 2010. Т. 181. С. 582–625.
120. Numerical Implementation of Harmonic Polylogarithms to Weight $w = 8$ / J. Ablinger, J. Blümlein, M. Round [и др.] // Comput. Phys. Commun. 2019. Т. 240. С. 189–201.
121. Ferguson H. R. P., Bailey D. H. A Polynomial Time, Numerically Stable Integer Relation Algorithm: Tech. Rep.: RNR Technical Report RNR-91-032: 1992. URL:

- <https://www.nas.nasa.gov/assets/pdf/techreports/1991/rnr-91-032.pdf>.
122. Bailey D. H., Broadhurst D. J. Parallel integer relation detection: Techniques and applications // *Math. Comput.* 2001. T. 70. C. 1719–1736.
 123. Chetyrkin K. G., Tkachov F. V. Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops // *Nucl. Phys.* 1981. T. B192. C. 159–204.
 124. Tkachov F. V. A Theorem on Analytical Calculability of Four Loop Renormalization Group Functions // *Phys. Lett.* 1981. T. 100B. C. 65–68.
 125. Tkachov F. V. An algorithm for calculating multiloop integrals // *Theor. Math. Phys.* 1983. T. 56. C. 866–870. [*Teor. Mat. Fiz.*56,350(1983)].
 126. Lee R. N. Space-time dimensionality D as complex variable: Calculating loop integrals using dimensional recurrence relation and analytical properties with respect to D // *Nucl. Phys.* 2010. T. B830. C. 474–492.
 127. Lee R. N., Mingulov K. T. Introducing SummerTime: a package for high-precision computation of sums appearing in DRA method // *Comput. Phys. Commun.* 2016. T. 203. C. 255–267.
 128. Celmaster W., Gonsalves R. J. The Renormalization Prescription Dependence of the QCD Coupling Constant // *Phys. Rev.* 1979. T. D20. C. 1420.
 129. Braaten E., Leveille J. P. Minimal Subtraction and Momentum Subtraction in QCD at Two Loop Order // *Phys. Rev.* 1981. T. D24. C. 1369.
 130. Jegerlehner F., Tarasov O. V. Exact mass dependent two loop anti- $\alpha(s)(Q^2)$ in the background MOM renormalization scheme // *Nucl. Phys.* 1999. T. B549. C. 481–498.
 131. Chetyrkin K. G., Seidensticker T. Two loop QCD vertices and three loop MOM beta functions // *Phys. Lett.* 2000. T. B495. C. 74–80.
 132. α_s from the nonperturbatively renormalised lattice three gluon vertex / B. Alles, D. Henty, H. Panagopoulos [и др.] // *Nucl. Phys.* 1997. T. B502. C. 325–342.
 133. Ghost-gluon coupling, power corrections and $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ from lattice QCD with a dynamical charm / B. Blossier, Ph. Boucaud, M. Brinet [и др.] // *Phys. Rev.* 2012. T. D85. C. 034503.
 134. Gracey J. A. Momentum subtraction and the R ratio // *Phys. Rev.* 2014. T. D90, № 9. C. 094026.
 135. Chetyrkin K. G., Retey A. Three loop three linear vertices and four loop similar to MOM beta functions in massless QCD. 2000.
 136. von Smekal L., Maltman K., Sternbeck A. The Strong coupling and its running to four loops in a minimal MOM scheme // *Phys. Lett.* 2009. T. B681. C. 336–342.
 137. Gracey J. A. Three loop QCD MOM beta-functions // *Phys. Lett.* 2011. T. B700. C. 79–85.

138. Gracey J. A. Renormalization group functions of QCD in the minimal MOM scheme // J. Phys. 2013. T. A46. C. 225403.
139. Rytov T. A. Infrared fixed points in the minimal momentum subtraction scheme // Phys. Rev. 2014. T. D89, № 5. C. 056001.
140. Shrock R. Study of Possible Ultraviolet Zero of the Beta Function in Gauge Theories with Many Fermions // Phys. Rev. 2014. T. D89, № 4. C. 045019.
141. Dhar A., Gupta V. QCD Corrections in an Asymmetric Momentum Subtraction Scheme // Phys. Lett. 1981. T. 101B. C. 432–436.
142. Ayala C., Cvetič G., Kogerler R. Lattice-motivated holomorphic nearly perturbative QCD // J. Phys. 2017. T. G44, № 7. C. 075001.
143. Maas A., Mufti T. Two- and three-point functions in Landau gauge Yang-Mills-Higgs theory // JHEP. 2014. T. 04. C. 006.
144. Discretization Errors for the Gluon and Ghost Propagators in Landau Gauge using NSPT / J. Simeth, A. Sternbeck, E.-M. Ilgenfritz [и др.] // PoS. 2014. T. LATTICE2013. C. 459.
145. Gluonic three-point correlations in pure Landau gauge QCD / A. Blum, M. Huber, M. Mitter [и др.] // Phys. Rev. D. 2014. T. 89. C. 061703.
146. Landau gauge ghost propagator and running coupling in SU(2) lattice gauge theory / V.G. Bornyakov, E.M. Ilgenfritz, C. Litwinski [и др.] // Phys. Rev. D. 2015. T. 92, № 7. C. 074505.
147. Taylor J. C. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field // Nucl. Phys. 1971. T. B33. C. 436–444.
148. Four-loop QCD propagators and vertices with one vanishing external momentum / B. Ruijl, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren [и др.] // JHEP. 2017. T. 06. C. 040.
149. Zakharov V. I. QCD perturbative expansions in large orders // Nucl. Phys. 1992. T. B385. C. 452–480.
150. Beneke M. Renormalons // Phys. Rept. 1999. T. 317. C. 1–142.
151. Beneke M., Braun V. M. Renormalons and power corrections. 2000. In Shifman, M. (ed.): At the frontier of particle physics, vol. 3. hep-ph/0010208. C. 1719–1773.
152. Broadhurst D. J., Kataev A. L. Connections between deep inelastic and annihilation processes at next to next-to-leading order and beyond // Phys. Lett. 1993. T. B315. C. 179–187.
153. Tanabashi M. [и др.]. Review of Particle Physics // Phys. Rev. 2018. T. D98, № 3. C. 030001.
154. Chetyrkin K. G., Kniehl Bernd A., Steinhauser M. Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the \overline{MS} scheme // Phys. Rev. Lett. 1997. T. 79. C. 2184–2187.
155. Baker M., Johnson K. Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. 1969. T.

183. C. 1292–1299.
156. The Analytical four loop corrections to the QED Beta function in the $\overline{\text{MS}}$ scheme and to the QED psi function: Total reevaluation / S. G. Gorishnii, A. L. Kataev, S. A. Larin [и др.] // Phys. Lett. 1991. T. B256. C. 81–86.
157. Tarasov O. V., Shirkov D. V. Gauge dependence of the ultraviolet behavior in perturbative QCD. (In Russian) // Sov. J. Nucl. Phys. 1990. T. 51. C. 877–881. [Yad. Fiz.51,1380(1990)].
158. Vector Correlator in Massless QCD at Order $O(\alpha_s^4)$ and the QED beta-function at Five Loop / P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn [и др.] // JHEP. 2012. T. 07. C. 017.
159. Kataev A. L. Conformal symmetry limit of QED and QCD and identities between perturbative contributions to deep-inelastic scattering sum rules // JHEP. 2014. T. 02. C. 092.
160. Adler S. L., Bardeen W. A. Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation // Phys. Rev. 1969. T. 182. C. 1517–1536. [268(1969)].
161. Schreier E. J. Conformal symmetry and three-point functions // Phys. Rev. 1971. T. D3. C. 980–988.
162. Crewther R. J. Nonperturbative evaluation of the anomalies in low-energy theorems // Phys. Rev. Lett. 1972. T. 28. C. 1421.
163. Mondejar J., Melnikov K. The VVA correlator at three loops in perturbative QCD // Phys. Lett. 2013. T. B718. C. 1364–1368.
164. Larin S. A. The Renormalization of the axial anomaly in dimensional regularization // Phys. Lett. 1993. T. B303. C. 113–118.
165. Gabadadze G. T., Kataev A. L. On connection between coefficient functions for deep inelastic and annihilation processes // JETP Lett. 1995. T. 61. C. 448–452. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.61,439(1995)].
166. Constraints on anomalies / S. L. Adler, Curtis G. Callan, Jr., D. J. Gross [и др.] // Phys. Rev. 1972. T. D6. C. 2982–2988. [395(1973)].
167. Jegerlehner F., Tarasov O. V. Explicit results for the anomalous three point function and non-renormalization theorems // Phys. Lett. 2006. T. B639. C. 299–306.
168. Crewther R. J. Relating inclusive e^+e^- annihilation to electroproduction sum rules in quantum chromodynamics // Phys. Lett. 1997. T. B397. C. 137–142.
169. Braun V. M., Korchemsky G. P., Müller D. The Uses of conformal symmetry in QCD // Prog. Part. Nucl. Phys. 2003. T. 51. C. 311–398.
170. Chanowitz M. S., Ellis J. R. Canonical Anomalies and Broken Scale Invariance // Phys. Lett. 1972. T. 40B. C. 397–400.

171. Minkowski P. On the Anomalous Divergence of the Dilatation Current in Gauge Theories. 1976. PRINT-76-0813, Univ. of Bern, (BERN).
172. Adler S. L., Collins J. C., Duncan A. Energy-Momentum-Tensor Trace Anomaly in Spin 1/2 Quantum Electrodynamics // Phys. Rev. 1977. T. D15. C. 1712. [318(1976)].
173. Collins J. C., Duncan A., Joglekar S. D. Trace and Dilatation Anomalies in Gauge Theories // Phys. Rev. 1977. T. D16. C. 438–449.
174. Nielsen N. K. The Energy Momentum Tensor in a Nonabelian Quark Gluon Theory // Nucl. Phys. 1977. T. B120. C. 212–220.
175. De Rafael E., Rosner J. L. Short-distance behavior of quantum electrodynamics and the callan-symanzik equation for the photon propagator // Annals Phys. 1974. T. 82. C. 369–406.
176. Broadhurst D. J., Kataev A. L., Tarasov O. V. Analytical on-shell QED results: Three loop vacuum polarization, four loop Beta function and the muon anomaly // Phys. Lett. 1993. T. B298. C. 445–452.
177. The Generalized Scheme-Independent Crewther Relation in QCD / J.-M. Shen, X.-G. Wu, Y. Ma [и др.] // Phys. Lett. 2017. T. B770. C. 494–499.
178. Bednyakov A., Pikelner A. Four-loop QCD MOM beta functions from the three-loop vertices at the symmetric point // Phys. Rev. D. 2020. T. 101, № 7. C. 071502.
179. Stefanis N. G. Gauge invariant quark two point Green's function through connector insertion to $O(\alpha_s)$ // Nuovo Cim. 1984. T. A83. C. 205.
180. Craigie N. S., Dobrev V. K., Todorov I. T. Conformally Covariant Composite Operators in Quantum Chromodynamics // Annals Phys. 1985. T. 159. C. 411–444.
181. Stefanis N. G. Worldline techniques and QCD observables. 2012. [Acta Phys. Polon. Supp.6,71(2013)].
182. Mikhailov S. V. Renormalon chains contributions to nonsinglet evolutional kernels in QCD // Phys. Lett. 1998. T. B431. C. 387–394.
183. Mikhailov S. V. A multiloop improvement of nonsinglet QCD evolution equations // Phys. Rev. 2000. T. D62. C. 034002.
184. Fried H. M., Yennie D. R. New Techniques in the Lamb Shift Calculation // Phys. Rev. 1958. T. 112. C. 1391–1404.
185. Tomozawa Y. Note on the Yennie Gauge // Annals Phys. 1980. T. 128. C. 491.
186. Gracey J. A. Symmetric point quartic gluon vertex and momentum subtraction // Phys. Rev. 2014. T. D90, № 2. C. 025011.
187. Tanaka K. Three-loop formula for quark and gluon contributions to the QCD trace anomaly // JHEP. 2019. T. 01. C. 120.

188. Beneke M. A Quark mass definition adequate for threshold problems // Phys. Lett. 1998. Т. B434. С. 115–125.
189. Sumino Y. Understanding Interquark Force and Quark Masses in Perturbative QCD. 2014.
190. The MSR mass and the $\mathcal{O}(\Lambda_{\text{QCD}})$ renormalon sum rule / A. H. Hoang, A. Jain, C. Lepenik [и др.] // JHEP. 2018. Т. 04. С. 003.
191. Three Loop Relation of Quark (Modified) Ms and Pole Masses / N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe [и др.] // Z. Phys. 1990. Т. C48. С. 673–680.
192. Avdeev L. V., Kalmykov M. Yu. Pole masses of quarks in dimensional reduction // Nucl. Phys. 1997. Т. B502. С. 419–435.
193. Two loop QCD corrections of the massive fermion propagator / J. Fleischer, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov [и др.] // Nucl. Phys. 1999. Т. B539. С. 671–690. [Erratum: Nucl. Phys.B571,511(2000)].
194. Melnikov K., van Ritbergen T. The Three loop relation between the MS-bar and the pole quark masses // Phys. Lett. 2000. Т. B482. С. 99–108.
195. Chetyrkin K. G., Steinhauser M. The Relation between the MS-bar and the on-shell quark mass at order α_s^3 // Nucl. Phys. 2000. Т. B573. С. 617–651.
196. Tarrach R. The Pole Mass in Perturbative QCD // Nucl. Phys. 1981. Т. B183. С. 384–396.
197. Light quark mass effects in the on-shell renormalization constants / S. Bekavac, A. Grozin, D. Seidel [и др.] // JHEP. 2007. Т. 10. С. 006.
198. Jegerlehner F., Kalmykov M. Yu., Kniehl B. A. On the difference between the pole and the \overline{MS} masses of the top quark at the electroweak scale // Phys. Lett. B. 2013. Т. 722. С. 123–129.
199. Four-loop corrections with two closed fermion loops to fermion self energies and the lepton anomalous magnetic moment / R. Lee, P. Marquard, A. V. Smirnov [и др.] // JHEP. 2013. Т. 03. С. 162.
200. Quark Mass Relations to Four-Loop Order in Perturbative QCD / P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2015. Т. 114, № 14. С. 142002.
201. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, 1958. 338 с.
202. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 523 с.
203. Tkachov F. V. Transcending the least squares. 2006. physics/0604127.

204. Kiyo Y., Mishima G., Sumino Y. Strong IR Cancellation in Heavy Quarkonium and Precise Top Mass Determination // JHEP. 2015. T. 11. C. 084.
205. Beneke M. More on ambiguities in the pole mass // Phys. Lett. 1995. T. B344. C. 341–347.
206. Komijani J. A discussion on leading renormalon in the pole mass // JHEP. 2017. T. 08. C. 062.
207. Bender C. M., Wu T. T. Anharmonic oscillator // Phys. Rev. 1969. T. 184. C. 1231–1260.
208. $\overline{\text{MS}}$ -on-shell quark mass relation up to four loops in QCD and a general $\text{SU}(N)$ gauge group / P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov [и др.] // Phys. Rev. 2016. T. D94, № 7. C. 074025.
209. Nachtmann O., Wetzel W. The Beta Function for Effective Quark Masses to Two Loops in QCD // Nucl. Phys. 1981. T. B187. C. 333–342.
210. Tarasov O. V. Anomalous dimensions of quark masses in three loop approximation. 1982. № JINR-P2-82-900, / arXiv:1910.12231[hep-ph], P2-82-900.
211. Larin S. A. The Axial anomaly in dimensional regularization // in *Proc. of the Int. School “Particles and Cosmology”, Baksan Neutrino Observatory of INR, 1993* . / под ред. Kh.S. Nirov E.N. Alekseev, V.A. Matveev, V.A. Rubakov. World Scientific, Singapore, 1994. C. 216–226.
212. Vermaseren J. A. M., Larin S. A., van Ritbergen T. The four loop quark mass anomalous dimension and the invariant quark mass // Phys. Lett. 1997. T. B405. C. 327–333.
213. Chetyrkin K. G. Quark mass anomalous dimension to $O(\alpha_s^4)$ // Phys. Lett. 1997. T. B404. C. 161–165.
214. Chetyrkin K. G., Kniehl B. A., Sirlin A. Estimations of order α_s^3 and α_s^4 corrections to mass dependent observables // Phys. Lett. 1997. T. B402. C. 359–366.
215. Zwicky R. A brief Introduction to Dispersion Relations and Analyticity // Quantum Field Theory at the Limits: from Strong Fields to Heavy Quarks. 2017. C. 93–120.
216. Pivovarov A. A. Renormalization group summation, spectrality constraints, and coupling constant analyticity for phenomenological applications of two-point correlators in QCD // Phys. Atom. Nucl. 2003. T. 66. C. 724–736. [Yad. Fiz.66,754(2003)].
217. Broadhurst D. J., Kataev A. L., Maxwell C. J. Renormalons and multiloop estimates in scalar correlators: Higgs decay and quark mass sum rules // Nucl. Phys. 2001. T. B592. C. 247–293.
218. Kataev A. L., Molokoedov V. S. Multiloop contributions to the on-shell- $\overline{\text{MS}}$ heavy quark mass relation in QCD and the asymptotic structure of the corresponding series // arXiv:1807.05406[hep-ph]. 2018.

219. Baikov P. A., Chetyrkin K. G., Kühn J. H. Quark Mass and Field Anomalous Dimensions to $\mathcal{O}(\alpha_s^5)$ // JHEP. 2014. T. 10. C. 076.
220. Five-loop quark mass and field anomalous dimensions for a general gauge group / T. Luthe, A. Maier, P. Marquard [и др.] // JHEP. 2017. T. 01. C. 081.
221. Kataev A. L., Kim V. T. Peculiar features of the relations between pole and running heavy quark masses and estimates of the $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ contributions // Phys. Part. Nucl. 2010. T. 41. C. 946–950.
222. Alekhin S., Moch S., Thier S. Determination of the top-quark mass from hadro-production of single top-quarks // Phys. Lett. 2016. T. B763. C. 341–346.
223. Ball R. D. [и др.]. Parton distributions for the LHC Run II // JHEP. 2015. T. 04. C. 040.
224. Strong-coupling constant with flavor thresholds at five loops in the anti-MS scheme / B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2006. T. 97. C. 042001.
225. Liss T.M., Maltoni F., A. Quadt. “Top quark,” in M. Tanabashi *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics,” // Phys. Rev. D. 2018. T. 98, № 030001.
226. First combination of Tevatron and LHC measurements of the top-quark mass. arXiv:1403.4427 [hep-ex] / [ATLAS, CDF, CMS [и др.]]. 2014.
227. Khachatryan V., others. [CMS Collaboration]. Measurement of the top quark mass using proton-proton data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV // Phys. Rev. 2016. T. D93, № 7. C. 072004.
228. Mateu V., Ortega P. G. Bottom and Charm Mass determinations from global fits to $Q\bar{Q}$ bound states at N³LO // JHEP. 2018. T. 01. C. 122.