Учреждение Российской академии наук

Институт ядерных исследований РАН

На правах рукописи

Панин Александр Григорьевич

Квазиклассическое описание процессов динамического туннелирования в многомерной квантовой механике

01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва–2010

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте ядерных исследований РАН

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук *Д. Г. Левков*

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук *Ю. В. Грац* (МГУ)

доктор физико-математических наук *М. Б. Менский* (ФИАН)

Ведущая организация:

Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына Московского Государственного университета имени М. В. Ломоносова

Защита состоится «   » ________________ 2010 г. в ________час. на заседании Диссертационного совета Д 002.119.01 Учреждения Российской академии наук Института ядерных исследований РАН по адресу: 117312 Москва, проспект 60-летия Октября, дом 7а.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Учреждения Российской академии наук Института ядерных исследований РАН.

Автореферат разослан «   » ________________ 2010 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.119.01
кандидат физико-математических наук *Б. А. Тулупов*

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Одним из наиболее распространенных непертурбативных процессов в квантовой физике является процесс туннелирования между состояниями, разделенными потенциальным барьером. Несмотря на то, что эффект туннелирования был открыт более 80 лет назад, туннельные процессы, в особенности процессы многомерного туннелирования, представляют значительный интерес для изучения.

Наиболее яркой особенностью туннельных процессов в системах с несколькими степенями свободы является наличие эффекта «динамического туннелирования». Данный эффект непосредственно связан с многомерной классической динамикой и отражает тот факт, что переходы между некоторыми начальными и конечными состояниями могут быть классически запрещены даже в том случае, когда полная энергия системы превышает высоту эффективного потенциального барьера между состояниями. На квантовом уровне вероятность таких переходов экспоненциально мала. Ясно, что процессы динамического туннелирования не имеют одномерных аналогов. Туннельные переходы при энергиях, не превышающих высоту потенциального барьера, будем называть «потенциальным туннелированием».

Именно динамическое туннелирование является предметом рассмотрения настоящей диссертации. Пожалуй, наиболее эффективным методом описания сложных туннельных процессов в нелинейных многомерных системах является квазиклассический метод комплексных траекторий. С помощью этого метода задачу о вычислении вероятности туннелирования можно свести к задаче о нахождении комплексной траектории — комплексного решения классических уравнений движения в комплексном времени. Форма временного контура, а также граничные условия, накладываемые на комплексную траекторию в асимптотических прошлом и будущем, зависят от квантовых чисел начального и конечного состояний. Вероятность перехода имеет вид

$$\mathcal{P} = A(g)\,\mathrm{e}^{-F/g^2}\;, \tag{1}$$

где g обозначает квазиклассический параметр — безразмерную комбинацию параметров системы, пропорциональную постоянной Планка. Экспонента подавления F вычисляется с помощью нахождения классического действия системы на комплексной траектории. Предэкспоненциальный множитель A вычисляется путем анализа линейных возмущений на фоне комплексной траектории.

В работах Т. Ониши, А. Шудо, К. С. Икеды, К. Такахаши (2003 г.) и Ф. Л. Безрукова, Д. Г. Левкова (2003 г.) был обнаружен новый механизм динамического туннелирования. Данный механизм проявляется в несепарабельных системах с несколькими степенями свободы при энергиях, превышающих некоторую критическую энергию E_c. Значение критической энергии E_c зависит от деталей динамики рассматриваемой системы, однако оно всегда превышает высоту потенциального барьера между начальным и конечным состояниями.

Комплексные траектории, описывающие туннельный процесс при $E > E_c$, обладают качественно новым свойством. Вместо того, чтобы интерполировать между начальными и конечными областями фазового пространства, они стремятся к нестабильной периодической орбите, лежащей на границе между начальной и конечной областями. В простейшем случае системы с двумя степенями свободы данная периодическая орбита описывает осцилляции около седловой точки потенциального барьера. Пример двумерного потенциала, в котором встречается такое необычное поведение комплексных траекторий, приведен на рис. 2. На этом рисунке комплексная траектория, изображенная тонкой линией, стремится при $t \to +\infty$ к нестабильной периодической орбите (толстая линия). Следуя терминологии теории поля, будем называть нестабильную периодическую орбиту *сфалероном* , а связанный с ней механизм туннелирования — туннелированием с образованием сфалерона .

Механизм сфалеронного туннелирования возникает в моделях с регулярной и нерегулярной динамикой, при описании переходов через одномерные потенциальные барьеры, зависящие от времени, а также в случаях хаотического туннелирования. В моделях квантовой теории поля новый механизм является определяющим для туннельных процессов, индуцированных столкновениями высокоэнергичных частиц. По-видимому, механизм туннелирования с образованием сфалерона является общим для многомерных несепарабельных систем, поэтому его изучение представляется важным.

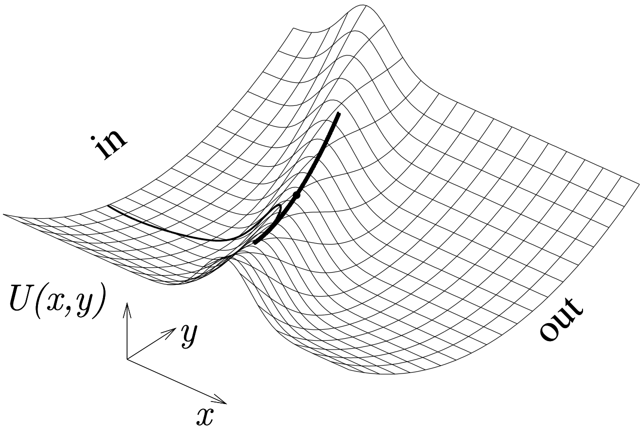

Рис. 1. Потенциал модели (2), в которой переходы через потенциальный барьер при высоких энергиях описываются нестабильными комплексными траекториями. Действительная часть комплексной траектории изображена тонкой линией, нестабильная орбита, к которой она стремится — толстой линией.

Первым аспектом диссертации является изучение проявлений механизма сфалеронного туннелирования, которые могут быть использованы для того, чтобы обнаружить этот механизм экспериментально. В диссертации показано, что выражение для вероятности сфалеронного туннелирования подавлено дополнительной степенью квазиклассического параметра g. Напомним, что квазиклассический параметр g является безразмерной комбинацией параметров системы, пропорциональной постоянной Планка; значение g можно менять в экспериментах.

Другим проявлением механизма сфалеронного туннелирования является аномальное уширение распределений эксклюзивных вероятностей по квантовым числам конечного состояния. Действительно, после образования классического нестабильного «состояния» происходит вторая стадия туннельного процесса — распад сфалерона. Так как сфалерон нестабилен, его распад происходит классически, примерно с одинаковой вероятностью в широкий спектр конечных состояний, определяемый свойствами системы. Этот эффект был впервые обнаружен в работах К. Такахаши и К. С. Икеды (2006-2008 гг.), в которых рассматривалась одномерная система с потенциалом, зависящим от времени. В диссертации этот эффект исследован на примере двумерной квантовомеханической системы.

Третьей отличительной особенностью нового механизма является сравнительно большое время туннельного перехода. В работах К. Такахаши и К. С. Икеды (2006-2008 гг.) было показано, что в связи с механизмом сфалеронного туннелирования функция распределения вероятности по временам перехода спадает степенным образом в области больших времен. Это приводит к большому значению среднего времени туннелирования. В диссертации данный эффект рассматривается в двумерной модели. Наш результат, однако, несколько отличается от результата К. Такахаши и К. С. Икеды. А именно, в двумерной системе, рассмотренной в диссертации, распределение вероятности по временам перехода спадает экспоненциально. Это показывает, что поведение этого распределения, по-видимому, является модельно зависимым.

Вторым аспектом диссертации является разработка новых квазиклассических методов, применимых для описания ситуаций, в которых использование стандартных квазиклассических методов либо невозможно, либо сталкивается с существенными трудностями. Сложность описания процессов сфалеронного туннелирования связана с нестабильностью соответствующих комплексных траекторий, которые стремятся к нестабильной периодической орбите. Для описания второй стадии туннельного процесса — распада сфалерона — необходимо найти действительную траекторию, стартующую с нестабильной орбиты, и заканчивающуюся в конечной области фазового пространства. Трудности возникают при сшивке этих двух траекторий. Другая серьезная проблема связана с вычислением предэкспоненциального множителя A в выражении для вероятности перехода (1). Действительно, стандартные формулы для вычисления предэкспоненциального фактора связаны с линейными возмущениями на фоне комплексной траектории. Поскольку комплексная траектория нестабильна, линейные возмущения экспоненциально растут со временем. В пределе бесконечно больших времен (задача рассеяния) формальное применение стандартных методов приводит к неверному результату $A = 0$. В диссертации разработан квазиклассический метод, применимый для описания процессов сфалеронного туннелирования. В этом случае получена общая квазиклассическая формула для вероятности.

Важным является доказательство гипотезы Рубакова-Шона-Тинякова (1992 г.) в контексте квантовой механики. Эта гипотеза возникла в теории поля при описании туннельных переходов, индуцированных столкновениями высокоэнергичных частиц. Гипотеза гласит, что что квазиклассическая вероятность туннелирования из состояний с малыми значениями квантовых чисел может быть получена как определенный предел от вероятности туннелирования из квазиклассических состояний. В диссертации эта гипотеза доказана в двумерной квантовомеханической модели.

Помимо нестабильности комплексных траекторий, существуют и другие трудности, связанные с применением квазиклассических методов в системах с несколькими степенями свободы. Известно, что в общем случае квазиклассическая краевая задача обладает бесконечным дискретным набором решений. Некоторые из них могут оказаться нефизическими и должны быть отброшены. Идентификация физических решений во многом основывается на определенных свойствах рассматриваемых систем. В настоящее время надежного критерия выбора физических решений, применимого в общем случае, не существует. Даже после того, как все нефизические решения отброшены, остается проблема выбора решения (или набора решений) с минимальным значением экспоненты подавления. Общего критерия выбора таких решений также не существует.

Вышеупомянутые трудности выбора релевантных траекторий особенно существенны при описании туннельных переходов в хаотических системах. Нерегулярность динамики — общее свойство нелинейных систем со многими степенями свободы. Квазиклассический анализ хаотического туннелирования осложняется существованием бесконечного набора квазиклассических траекторий, образующих фрактальную последовательность в пространстве начальных данных Коши. Прямой анализ этой последовательности с целью классификации траекторий и идентификации физически релевантных решений является достаточно сложной задачей. В настоящее время квазиклассическое изучение процессов хаотического туннелирования ограничено специальными случаями, в которых фазовое пространство систем может быть визуализировано (одномерные системы с зависящим от времени потенциалом) или ограничено небольшим подклассом периодических туннельных орбит. Таким образом, разработка общих методов классификации квазиклассических решений имеет большое значение. В диссертации предложен метод классификации траекторий, а также эвристический метод выбора траектории, отвечающей минимальному значению экспоненты подавления.

Цель работы состоит в изучении механизма сфалеронного туннелирования, а также в разработке новых квазиклассических методов, применимых для описания сложных процессов многомерного туннелирования.

Научная новизна и практическая ценность.

Впервые приведен последовательный вывод квазиклассического метода ϵ – регуляризации, применимого для описания процессов сфалеронного туннелирования. В этом случае получено выражение для вероятности туннелирования. Показано, что вероятность туннелирования с образованием сфалерона подавлена дополнительным множителем g, что является отличительной особенностью нового туннельного механизма. Метод проверен явным сравнением квазиклассического ответа для вероятности туннелирования с «точным» значением вероятности, полученным с помощью численного решения уравнения Шредингера в модельном потенциале.

Впервые получены общие квазиклассические выражения для вероятности туннелирования, применимые в окрестности критической энергии E_c, соответствующей смене режимов потенциального туннелирования и туннелирования с образованием сфалерона. С целью проверки выражений проведено явное сравнение квазиклассической вероятности туннелирования при $E \approx E_c$ с точной вероятностью, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в модельном потенциале. Квазиклассический результат совпадает с точным.

Впервые в двумерной модели исследовано уширение распределений эксклюзивных вероятностей перехода по квантовым числам конечного состояния в режиме сфалеронного туннелирования. Это явление связано с поведением эксклюзивных экспонент подавления, что является одной из отличительных характеристик нового туннельного механизма. Эффект рассмотрен на примере двумерной модели, где проведен квазиклассический расчет экспонент подавления эксклюзивных переходов. Показано, что предэкспоненциальные множители эксклюзивных вероятностей потенциального и сфалеронного туннелирования пропорциональны g^2 и g^4 соответственно. Квазиклассическое выражение подтверждено явным сравнением экспоненты подавления с экспонентой, полученной из численного решения уравнения Шредингера.

Впервые получено квазиклассическое выражение для вероятности туннелирования из начальных состояний с малыми значениями квантовых чисел. Показано, что вероятность туннелирования из низколежащих состояний может быть получена как определенный предел от вероятности туннелирования из квазиклассических состояний, что доказывает гипотезу Рубакова-Шона-Тинякова в квантовомеханической модели. Проведено явное сравнение квазиклассических и точных результатов для вероятности туннелирования из низколежащих состояний в модельном потенциале.

Впервые получено общее квазиклассическое выражение для функции распределения вероятности по временам туннельного перехода. Показано, что функция распределения является гауссовой в случае потенциального туннелирования и имеет асимметричную форму для сфалеронных переходов. В последнем случае распределение быстро достигает максимального значения, а затем экспоненциально спадает в области больших времен перехода. Показано, что зависимости среднего времени перехода и дисперсии времени от квазиклассического параметра g имеют следующий вид: $\langle\tau\rangle \propto g^0$, $\sigma_\tau^2 \propto g^2$ в случае стабильных траекторий; $\langle\tau\rangle \propto |\ln g|$, $\sigma_\tau^2 \gtrsim g^0$ в случае нестабильных траекторий. Эти зависимости подтверждены с помощью явного квантовомеханического вычисления в двумерной модели.

Изучена функция распределения по временам туннелирования в задаче о рассеянии одномерных волновых пакетов. Впервые показано, что в случае активационных процессов перехода, связанных с ненулевой дисперсией импульса в начальном состоянии, функция распределения имеет универсальную форму распределения Гумбеля I рода. Квазиклассические результаты для распределения подтверждены прямым сравнением с точными в модельном потенциале.

Изучена двумерная квантовомеханическая модель с хаотической классической динамикой. Показано, что хаотичность системы приводит к бесконечному числу ветвей квазиклассических траекторий, описывающих туннельные переходы. Впервые предложен метод классификации траекторий, дополненный эвристическим методом выбора траектории с минимальной экспонентой подавления. Проведено явное сравнение квазиклассической экспоненты подавления с точной экспонентой, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в данной модели. Получено совпадение квазиклассических и точных результатов.

Апробация диссертации. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на научных семинарах ИЯИ РАН, на 50-й и 51-й Научных конференциях МФТИ (Долгопрудный, 2007-2008 гг.) на Международном семинаре «Кварки–2008» (Сергиев Посад), на совещании «Symposium on Theoretical and Mathematical Physics» (Санкт-Петербург, 2009 г.). По результатам диссертации опубликовано 5 работ.

Объем работы. Диссертация состоит из Введения, шести глав основного текста, Заключения и четырех приложений, содержит

155 страниц машинописного текста, в том числе 44 рисунка, 1 таблицу и список литературы из 102 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во Введении обсуждается новый механизм сфалеронного туннелирования. Кратко анонсируются физические эффекты, характерные для этого механизма. Приводятся простые оценки для величин этих эффектов. Обсуждается стандартный метод комплексных траекторий, невозможность его применения для описания процессов сфалеронного туннелирования. Излагаются основные идеи модифицированного метода ϵ-регуляризации, применимого для описания процессов туннелирования с образованием сфалерона. Обсуждается возможность применения квазиклассических методов в окрестности критической энергии E_c, соответствующей смене режимов потенциального туннелирования и туннелирования с образованием сфалерона. Обсуждается применение квазиклассических методов к описанию эксклюзивных туннельных переходов, к вычислению функции распределения по временам туннелирования. Рассматривается проблема классификации туннельных траекторий и проблема выбора наименее подавленной траектории в задачах хаотического туннелирования.

Глава 1 посвящена изучению механизма сфалеронного туннелирования на примере задачи рассеяния в двумерной квантовомеханической модели. Результаты данной главы получены с помощью численного решения уравнения Шредингера. В безразмерной системе единиц действие модели имеет вид

$$S = \frac{1}{g^2} \int dt \left(\frac{\dot{\boldsymbol{x}}^2}{2} - \frac{\omega^2 y^2}{2} - \mathrm{e}^{-(x+y)^2/2} \right) . \qquad (2)$$

Потенциал этой модели изображен на рис 2.

Модель (2) и безразмерная система единиц введены в разделе 1.1. Из выражения (2) видно, что роль эффективной постоянной Планка играет квазиклассический параметр g^2. Эволюция системы представляет собой движение частицы единичной массы в двумерном гармоническом волноводе частоты ω, ось которого совпадает с осью x. В области $x \approx 0$ расположен потенциальный барьер высоты $U_0 = 1$, разделяющий волновод на две части. Изучаются переходы частицы между асимптотическими областями $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ — начальной и конечной областями соответственно. Начальное квантовое состояние частицы фиксируется полной энергией E и энергией осцилляций E_y вдоль оси y. Показано, что при $E > E_c(E_y)$ переходы частицы в асимптотическую область $x \to +\infty$ происходят посредством механизма сфалеронного туннелирования.

В разделе 1.2 изучена вероятность туннелирования в зависимости от квазиклассического параметра g^2. Показано, что вероятность туннелирования с образованием сфалерона подавлена дополнительной степенью квазиклассического параметра по сравнению с вероятностью потенциального туннелирования.

Другая отличительная особенность нового туннельного механизма изучена в разделе 1.3. Рассмотрены эксклюзивные переходы частицы в конечное состояние с фиксированными E и E_y^f, где E_y^f — энергия колебаний y-осциллятора в конечном состоянии. Показано, что распределения вероятностей $\mathcal{P}(E_y^f)$ при фиксированных E, E_y являются аномально широкими в режиме туннелирования с образованием сфалерона по сравнению с распределениями, соответствующими режиму потенциального туннелирования.

В разделе 1.4 изучено еще одно проявление нового туннельного механизма. Показано, что образование и распад нестабильного промежуточного состояния приводят к сравнительно большой задержке во времени перехода волновых пакетов через потенциальный барьер. Время перехода τ определено как случайная величина с функцией распределения $\rho(\tau)$, пропорциональной потоку вероятности за потенциальным барьером.

В главе 2 разработан модифицированный метод комплексных траекторий, применимый для описания процессов сфалеронного туннелирования. Для определенности рассматривались туннельные переходы в системах, похожих на введенную ранее модель (2). А именно, интерес представляли инклюзивные туннельные переходы между асимптотическими областями $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ двумерного гармонического волновода частоты ω.

Стандартный метод комплексных траекторий кратко изложен в подразделе 2.1.1. Получена квазиклассическая формула (1) для вероятности потенциального туннелирования. Показано, что предэкспоненциальный множитель A_{pot} пропорционален g. Квазиклассическое выражение для вероятности подтверждено явным срав-

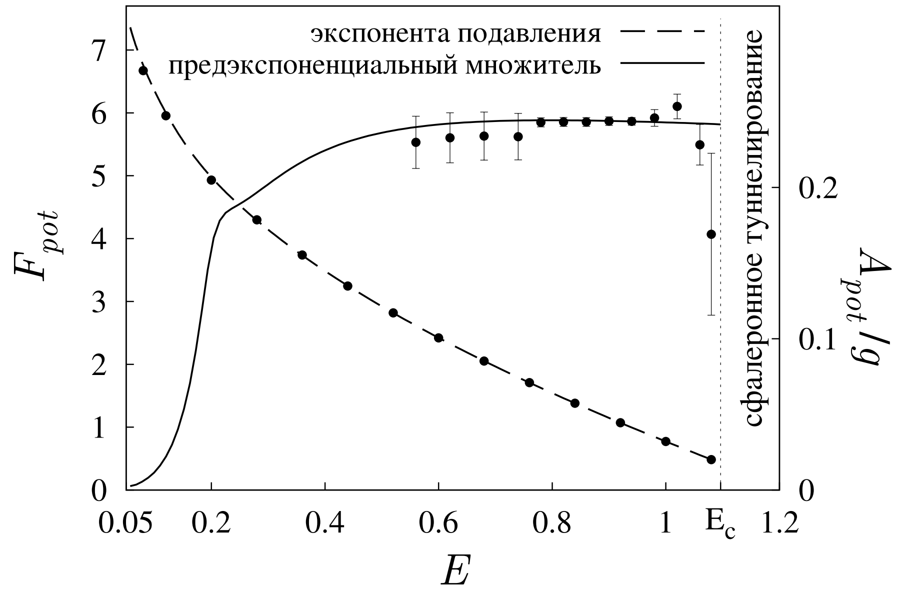

Рис. 2. Квазиклассический (линии) и точный (точки) результаты для экспоненты подавления и предэкспоненциального множителя; $E_y = 0.05$.

нением с точной вероятностью, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера. Результат сравнения представлен на рис. 2.

В подразделе 2.1.2 изложен вывод модифицированного квазиклассического метода ϵ-регуляризации, применимого для описания процессов сфалеронного туннелирования. Стартовой точкой вычисления служил функциональный интеграл для амплитуды перехода. Этот интеграл вычислялся в две стадии. На первой стадии суммировались вклады траекторий, отвечающих заданному времени перехода τ. Метод, используемый для фиксации τ в функциональном интеграле, схож с методом неопределенных множителей Лагранжа в классических системах. Однако, в случае подбарьерного движения фиксация времени перехода приводит к появлению в уравнениях движения чисто мнимого слагаемого, пропорционального «множителю Лагранжа» $i\epsilon$. Именно это слагаемое ответственно за стабилизацию комплексных траекторий. На второй стадии вычисления мы интегрируем по τ. Интегрирование следует проводить с учетом особенностей процесса. В случае потенциального туннелирования интеграл по τ насыщается окрестностью седловой точки. В случае туннелирования с образованием сфалерона интеграл насыщается при $\tau \to +\infty$, что приводит к выражению для вероятности перехода, отличному от выражения в случае потенциального туннелирования. В частности, предэкспоненциальный множитель A_{sph} вероятности сфалеронного туннелирования пропорционален g^2 (в отличие от соответствующего множителя A_{pot} в случае потенциального туннелирования, который пропорционален g). С целью проверки метода проведено явное сравнение квазиклассической вероятности туннелирования с точной вероятностью, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в модели (2). Результат сравнения представлен на рис. 3.

При энергиях, близких к критической энергии E_c, соответствующей смене режимов потенциального и сфалеронного туннелирования, интегрировать по τ следует более аккуратно. В разделе 2.2 показано, что при $|E - E_c| \lesssim g$ окрестность седловой точки и область $\tau \to +\infty$ в интеграле по τ дают соизмеримый вклад. Поэтому для вычисления интеграла по τ следует использовать более

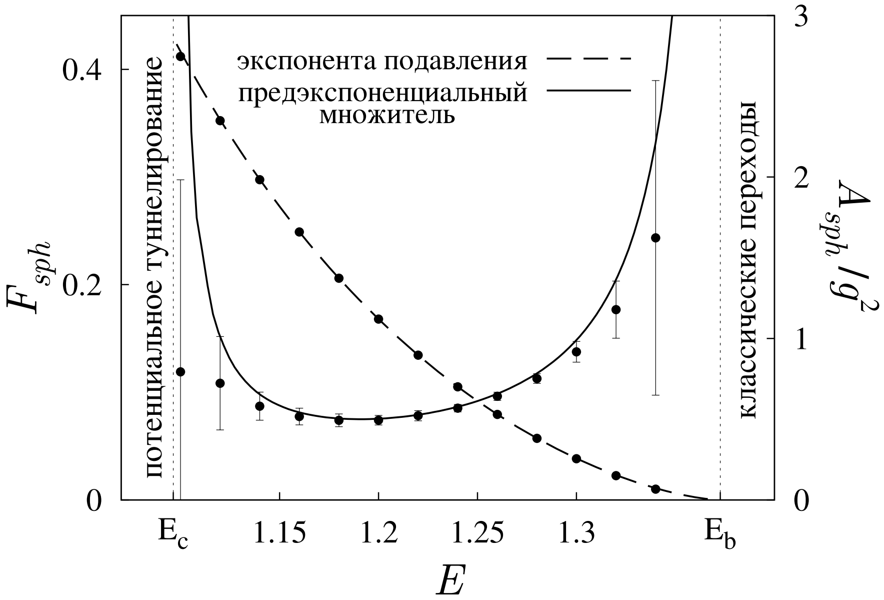

Рис. 3. Квазиклассический (линии) и точный (точки) результаты для экспоненты подавления и предэкспоненциального множителя; $E_y = 0.05$.

общую процедуру, учитывающую оба вклада. В разделе 2.2 мы дополняем метод ϵ-регуляризации необходимой процедурой. Полученная нами общая квазиклассическая формула применима при всех энергиях. Отметим, что при $E_c - E \gg g$ и $E - E_c \gg g$ общая формула совпадает с выражениями, полученными для случаев потенциального и сфалеронного туннелирования соответственно. Предложенный нами метод схож с «однородным приближением», рассмотренным в работе Г. Смита (2006 г.) для вычисления туннельного расщепления уровней. С целью проверки выражений проведено явное сравнение квазиклассической вероятности туннелирования при $E \approx E_c$ с точной вероятностью, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в модели (2).

Раздел 2.3 посвящен квазиклассическому изучению эксклюзивных переходов. В подразделе 2.3.1 показано, что новый механизм туннелирования приводит к размножению комплексных траекторий, описывающих эксклюзивный процесс. А именно, траектории образуют бесконечную последовательность и имеют следующую структуру: они достигают сфалерона, выполняют на нем целое число осцилляций, затем покидают нестабильную орбиту.

Подраздел 2.3.2 посвящен квазиклассическому вычислению эксклюзивной экспоненты подавления в модели (2). Туннельная амплитуда здесь является суммой вкладов от бесконечного набора туннельных траекторий. Так же как и в случае инклюзивных процессов, при $E > E_c(E_y)$ и $g \to 0$ сумма насыщается вкладом траектории, проводящей бесконечное время на сфалеронной орбите. Получена асимптотическая формула для предэкспоненциального множителя вероятности эксклюзивных переходов. Показано, что предэкспоненциальные множители вероятностей потенциального и сфалеронного туннелирования пропорциональны g^2 и g^4 соответственно. Здесь следует отметить, что в отличие от случая инклюзивных переходов, асимптотика эксклюзивной вероятности при $g \to 0$ может достигаться лишь при крайне малых значениях параметра g.

<u>В главе 3</u> рассмотрен вопрос о возможности квазиклассического описания процессов туннелирования из начальных состояний с малыми квантовыми числами. С первого взгляда может показаться, что такие состояния, и, следовательно, соответствующие

туннельные процессы не могут быть описаны квазиклассически. Детальное исследование показывает, однако, что главный вклад в вероятность туннелирования обеспечивается экспоненциально малыми хвостами волновых функций начального и конечного состояния. Экспоненциальные хвосты, в свою очередь, могут быть вычислены квазиклассически даже для состояний с малыми квантовыми числами. Таким образом, выражение для вероятности туннелирования имеет вид (1). Показано, что экспонента подавления F и предэкспоненциальный множитель A вероятности туннелирования из состояний с малыми значениями квантовых чисел могут быть вычислены как определенный предел от соответствующих величин, полученных для случая туннелирования из квазиклассических начальных состояний.

Глава 4 посвящена квазиклассическому вычислению функции распределения вероятности $\rho(\tau)$ по времени туннелирования. Показано, что в режиме сфалеронного туннелирования $\rho(\tau)$ несимметрично: оно быстро достигает максимального значения при некотором τ, а затем экспоненциально спадает в области больших времен перехода. Такое поведение $\rho(\tau)$ приводит к большим значениям среднего времени перехода и дисперсии времени в режиме туннелирования с образованием сфалерона.

Вывод общей квазиклассической формулы для $\rho(\tau)$, основанный на применении метода ϵ-регуляризации, представлен в разделе 4.1. Полученная формула справедлива как для потенциального, так и для сфалеронного туннелирования. Показано, что функция распределения является гауссовой если туннельный процесс описывается стабильной квазиклассической траекторией. В этом случае среднее время перехода и дисперсия времени масштабируются при изменении квазиклассического параметра g как $\langle \tau \rangle \propto g^0$, $\sigma_\tau^2 \propto g^2$.

С целью проверки квазиклассического метода и иллюстрации его применения в разделе 4.2 рассмотрена задача о переходах гауссовых волновых пакетов через одномерный потенциальный барьер. Если средняя энергия начального волнового пакета меньше высоты потенциального барьера, но достаточно близка к ней, возникает явление активационных переходов. Эти переходы описываются нестабильной туннельной траекторией, залетающей на вершину барьера. Квазиклассическая функция распределения $\rho(\tau)$ в случае активационных переходов имеет универсальный вид распределения Гумбеля I рода: она зависит от двух параметров, в которых закодирована вся информация о системе.

В разделе 4.3 исследована асимптотика $\rho(\tau)$ в области больших времен перехода в случае, когда средняя энергия начального волнового пакета превышает высоту потенциального барьера между состояниями. Поведение этой функции распределения также является универсальным при больших τ .

В разделе 4.4 представлены результаты квазиклассического вычисления $\rho(\tau)$ в модели (2). В отличие от одномерного случая, нестабильность квазиклассических траекторий здесь связана с механизмом сфалеронного туннелирования. В случае, когда энергия туннельной траектории близка к вершине барьера (что соответствует малой амплитуде сфалеронных колебаний), распределение вероятности $\rho(\tau)$ имеет универсальную форму, аналогичную форме в одномерном случае. При повышении энергии линейный режим эволюции вблизи сфалерона нарушается, что приводит к изменению формы $\rho(\tau)$. Однако, среднее время туннелирования $\langle\tau\rangle \sim |\ln g|$ и дисперсия времени $\sigma_\tau^2 \gtrsim O(g^0)$ по-прежнему велики.

Глава 5 посвящена квазиклассическому изучению процесса хаотического туннелирования на примере задачи рассеяния в двумерной квантовомеханической модели. В безразмерной системе единиц эволюция системы представляет собой движение частицы единичной массы в двумерном потенциале

$$U(x,y) = \frac{\omega^2}{2}\left[y - a(x)\right]^2 \ , \qquad\qquad a(x) = a_0 \mathrm{e}^{-x^2/2} \ . \qquad (3)$$

Потенциал представляет собой двумерный гармонический волновод частоты ω, ось которого совпадает с линией $y = a(x)$. Изгиб оси волновода в области $x \approx 0$ приводит к нелинейной связи между степенями свободы системы; будем называть область изгиба областью взаимодействия. Здесь мы интересуемся инклюзивными процессами отражения частиц, налетающих из $x \to +\infty$, обратно в асимптотическую область $x \to +\infty$. Начальное квантовое состояние частицы характеризуется полной энергией E и энергией осцилляций E_y вдоль оси y. Заметим, что потенциальный барьер в системе отсутствует, поэтому процессы отражения частиц запрещены динамически.

Модель (3) введена в разделе 5.1.

В разделе 5.2 изучены процессы классического отражения. Показано, что в рассматриваемой модели существуют две нестабильные периодические орбиты. Будем называть их ближним и дальним сфалеронами в соответствии с их позициями по отношению к налетающей частице. Проведено исследование классических отражений. Показано, что они происходят при $E_y > E_y^b(E)$. Показано, что классические траектории образуют фрактальную последовательность, которую можно условно разбить на две подпоследовательности: главную и второстепенную. Траектории, принадлежащие главной подпоследовательности, залетают на дальний сфалерон, выполняют на нём несколько осцилляций и вылетают из области взаимодействия. Таким образом, каждой траектории из главной подпоследовательности можно поставить в соответствие число j, равное количеству осцилляций, которое она выполняет на дальнем сфалероне. Траектории из второстепенной подпоследовательности имеют более сложную структуру. Выполнив несколько осцилляций на дальнем сфалероне, они переходят на ближний сфалерон, осциллируют целое число периодов, снова возвращаются на дальний сфалерон, и так далее. Ключевым наблюдением этого раздела является то, что границе классически разрешенной области $E_y = E_y^b(E)$ соответствуют траектории из главной подпоследовательности, проводящие бесконечное время на дальнем сфалероне.

В разделе 5.3 рассматриваются процессы надбарьерного отражения при $E_y < E_y^b(E)$. Показано, что хаотичность классической динамики системы приводит к тому, что решениями квазиклассической краевой задачи является бесконечный набор комплексных траекторий, застревающих в области взаимодействия, и, следовательно, нестабильных. Показано, что метод ϵ-регуляризации обеспечивает непрерывную связь ветвей действительных классических решений, рассматриваемых как функции начальных данных, и комплексных траекторий, описывающих туннелирование. Таким образом, туннельные траектории «наследуют» фрактальную структуру классических решений, что решает проблему их классификации. Метод выбора туннельной траектории, имеющей минимальную экспоненту подавления, основан на наблюдении предыдущего раздела. При $E_y = E_y^b(E)$ действительными являются лишь траектории из главной подпоследовательности, проводящие бесконечное время на дальнем сфалероне. При этом остальные конфигурации комплексны, и, следовательно, соответствуют экспоненциально подавленным вкладам. Предполагается, что указанная траектория из главной подпоследовательности обладает минимальной экспонентой подавления при всех E и E_y. Это предположение подтверждено с помощью явного сравнения экспоненты подавления, вычисленной для траектории с $j = \infty$, с экспонентами подавления других всевозможных конфигураций.

В разделе 5.4 проведено явное сравнение квазиклассической экспоненты подавления с точной экспонентой, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в модели (3).

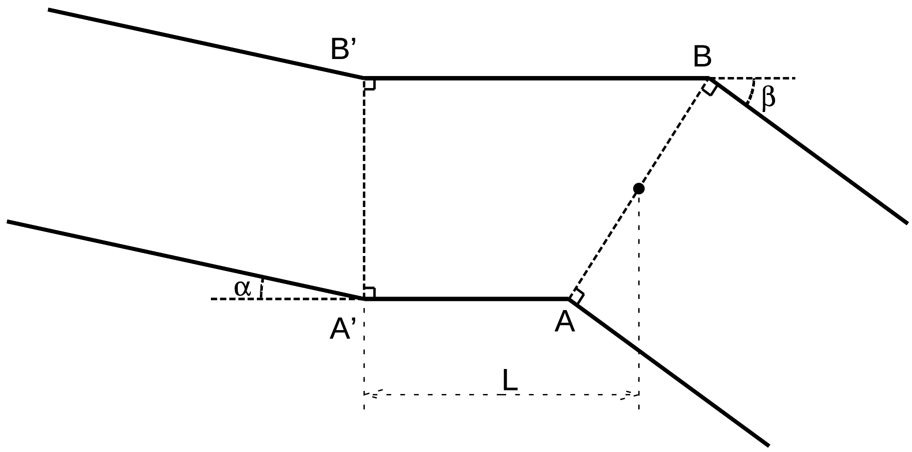

Рис. 4. Линия уровня волновода.

Совпадение результатов подтверждает правильность предложенных квазиклассических методов.

В главе 6 демонстрируется простой аналитический пример модели, в которой экспонента подавления вероятности надбарьерного отражения осциллирует при изменении энергии.

Модель, введенная в разделе 6.1, представляет собой гармонический волновод, состоящий из трех склеенных под определенными углами частей, как это показано на рис. 4 . Здесь мы интересуемся процессами отражения частицы единичной массы, движущейся слева направо вдоль волновода, обратно в левую асимптотическую область. Движение частицы в этой области представляет собой суперпозицию свободного поступательного движения вдоль оси волновода и поперечных осцилляций с частотой $\omega = 1$. Начальное квантовое состояние частицы будем характеризовать полной энергией E и энергией колебаний E_y. В конце раздела обсуждается применимость квазиклассического приближения в данной модели.

В разделе 6.2 изучены классические отражения. Показано, что в рассматриваемой модели существуют две нестабильные периодические орбиты (линии AB и $A'B'$ на рис. 4). Найдена граница классически разрешенной области $E_y^b(E)$. При $E_y > E_y^b(E)$ процессы отражения частицы происходят классически. Показано, что функция $E_y^b(E)$ осциллирует между двумя линейными огибающими, $E\cos^2(\beta+\alpha)$ и $E\cos^2(\beta-\alpha)$; период осцилляций уменьшается при $E \to 0$. Таким образом, кривая $E_y^b(E)$ имеет ряд минимумов. Показано, что граница классически разрешенной области соответствует наборам ветвей действительных траекторий, каждая из которых релевантна в некотором энергетическом интервале.

В разделе 6.3 рассматриваются процессы надбарьерного отражения. Показано, что структура ветвей комплексных траекторий аналогична структуре ветвей действительных траекторий. Показано, что в области надбарьерных отражений экспонента подавления осциллирует при изменении энергии.

В Заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертации.

Приложение A посвящено выводу стандартного квазиклассического метода комплексных траекторий. Получены выражения для экспоненты подавления и предэкспоненциального множителя вероятности туннелирования.

В Приложении B рассматривается эволюция системы вблизи сфалеронной орбиты. Целью данного приложения является изучение поведения экспоненты подавления вероятности туннелирования и предэкспоненциального множителя в случае, когда туннельная траектория проводит значительное время в окрестности сфалерона.

Приложение C содержит технические детали вывода формулы для вероятности туннелирования из начальных состояний с малыми значениями квантовых чисел.

Приложение D посвящено квазиклассическому вычислению функции распределения $\rho(\tau)$ в одномерной модели.

Для защиты выдвигаются следующие результаты, полученные в диссертации:

1. Показано, что в случае, когда квазиклассические траектории, описывающие туннельный переход, нестабильны, туннельная вероятность подавлена дополнительным множителем g по сравнению с вероятностью в стандартном случае стабильных траекторий. Здесь g — квазиклассический параметр. Это позволяет говорить о физически новом механизме сфалеронного туннелирования, связанным с нестабильностью квазиклассических траекторий. Новая зависимость вероятности туннелирования от квазиклассического параметра — отличительная особенность нового туннельного механизма.

2. Приведен последовательный вывод квазиклассического метода ϵ – регуляризации, применимого для описания процессов сфалеронного туннелирования. В этом случае получено выражение для вероятности туннелирования. С целью проверки метода проведено явное сравнение квазиклассической вероятности туннелирования с «точной» вероятностью, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в модельном потенциале. Совпадение результатов подтверждает правильность метода.
3. Получены общие квазиклассические выражения для вероятности туннелирования, применимые в окрестности критической энергии E_c, соответствующей смене режимов потенциального туннелирования и туннелирования с образованием сфалерона. С целью проверки выражений проведено явное сравнение квазиклассической вероятности туннелирования при $E \approx E_c$ с точной вероятностью, полученной с помощью численного решения уравнения Шредингера в модельном потенциале. Квазиклассический результат совпадает с точным.
4. На примере двумерной квантовомеханической модели проведен квазиклассический расчет экспонент подавления эксклюзивных переходов. Показано, что в режиме сфалеронного туннелирования существует область квантовых чисел конечного состояния, в которой экспонента подавления постоянна. Данное поведение экспоненты подавления является одной из отличительных характеристик нового туннельного

механизма. Квазиклассическое выражение подтверждено явным сравнением экспоненты подавления с точным значением, полученным с помощью численного решения уравнения Шредингера в модельном потенциале. Показано, что предэкспоненциальные множители вероятностей потенциального и сфалеронного туннелирования пропорциональны g^2 и g^4 соответственно.

5. Получено квазиклассическое выражение для вероятности туннелирования, применимое при малых значениях квантовых чисел начального состояния. Показано, что вероятность туннелирования из состояний с малыми значениями квантовых чисел может быть получена как определенный предел от вероятности туннелирования из квазиклассических состояний. В модельной системе проведено явное сравнение квазиклассических и точных результатов для вероятности туннелирования из низколежащих состояний. Совпадение результатов подтверждает правильность квазиклассического метода.
6. Получено общее квазиклассическое выражение для функции распределения вероятности по времени туннельного перехода. Показано, что функция распределения является гауссовой если туннельный процесс описывается стабильной квазиклассической траекторией, и имеет асимметричную форму в случае, когда траектория нестабильна. В последнем случае распределение быстро достигает максимального значения, а затем медленно спадает в области больших времен перехода.

Показано, что среднее время перехода и дисперсия времени масштабируются при изменении квазиклассического параметра g следующим образом: $\langle\tau\rangle \propto g^0$, $\sigma_\tau^2 \propto g^2$ в случае стабильных траекторий; $\langle\tau\rangle \propto |\ln g|$, $\sigma_\tau^2 \gtrsim g^0$ в случае нестабильных траекторий. Эти зависимости подтверждены с помощью явного вычисления в двумерной квантовомеханической модели.

7. Исследована функция распределения по временам туннелирования в задаче о переходе волновых пакетов через одномерный потенциальный барьер. Показано, что в случае активационных процессов перехода, происходящих за счет ненулевой дисперсии импульса в начальном состоянии, функция распределения имеет универсальную форму распределения Гумбеля I рода. Квазиклассические результаты для распределения подтверждены прямым сравнением с точными в модельном потенциале.

8. Изучены туннельные переходы в двумерной квантовомеханической системе с хаотической динамикой на классическом уровне. Показано, что хаотичность системы приводит к бесконечному числу ветвей квазиклассических траекторий, описывающих переходы. Предложен метод классификации траекторий, а также эвристический метод выбора траектории, отвечающей минимальному значению экспоненты подавления. Проведено явное сравнение квазиклассической экспоненты подавления с точной экспонентой, полученной с помо-

щью численного решения уравнения Шредингера в данной модели. Получено совпадение квазиклассических и точных результатов.

9. Построена двумерная квантовомеханическая модель, в которой экспонента подавления надбарьерного отражения ведет себя немонотонно, а именно, осциллирует как функция полной энергии.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. D. G. Levkov, A. G. Panin, S. M. Sibiryakov. Complex trajectories in chaotic dynamical tunneling // -Phys. Rev. -2007. -E76. -p.046209.
2. D. G. Levkov, A. G. Panin, S. M. Sibiryakov. Overbarrier reflection in quantum mechanics with multiple degrees of freedom // -Phys. Rev. -2007. -A76. -p.032114.
3. D. G. Levkov, A. G. Panin, S. M. Sibiryakov. Unstable Semiclassical Trajectories in Tunneling // -Phys. Rev. Lett. -2007. -99. -p.170407.
4. D. G. Levkov, A. G. Panin, S. M. Sibiryakov. Signatures of unstable semiclassical trajectories in tunneling // -J. Phys. -2009. -A42. -p.205102.
5. D. G. Levkov, A. G. Panin, S. M. Sibiryakov. Long quantum transitions due to unstable semiclassical dynamics // -Phys. Rev. -2009. -A80. -p.052110.