

ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. П.Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

Румянцев Дмитрий Александрович

**Резонансные электрослабые процессы в  
замагниченной плазме**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант

д. ф.-м. н., проф.

Кузнецов А.В.

Ярославль – 2018

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	5
<b>Глава 1. Обобщенная двухвершинная древесная амплитуда <math>jf \rightarrow j'f'</math> в замагниченной среде</b> . . . . .	19
1.1. Введение . . . . .	19
1.2. Вычисление амплитуды перехода $jf \rightarrow j'f'$ . . . . .	21
1.3. Амплитуды для случая основного уровня Ландау, $\ell = \ell' = 0$ . . . . .	29
1.4. Амплитуды для случая рассеяния вперед . . . . .	33
1.5. Обсуждение . . . . .	39
<b>Глава 2. Комptonовское рассеяние в замагниченной плазме</b> . . . . .	41
2.1. Введение . . . . .	41
2.2. Распространение фотона в замагниченной среде . . . . .	42
2.2.1. Зарядово симметричная плазма, $\mu = 0$ . . . . .	45
2.2.2. Зарядово несимметричная холодная плазма, $T \ll \mu - m$ . . . . .	49
2.3. Амплитуда процесса $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$ . . . . .	53
2.4. Коэффициент поглощения фотона и сечение в сильно замагниченной среде . . . . .	55
2.4.1. Зарядово симметричная плазма . . . . .	56
2.4.2. Холодная, почти вырожденная плазма . . . . .	64
<b>Глава 3. Расщепление фотона в сильно замагниченной плазме</b> . . . . .	70
3.1. Введение . . . . .	70
3.2. Амплитуда процесса расщепления фотона . . . . .	74
3.3. Кинематика и правила отбора . . . . .	78
3.4. Вероятность расщепления фотона . . . . .	81
3.4.1. Каналы $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ и $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$ . . . . .	82
3.4.2. Канал $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ . . . . .	90

3.4.3.	Зарядово несимметричная плотная плазма . . . . .	92
3.4.4.	Слияние фотонов . . . . .	94
3.5.	Обсуждение . . . . .	97
<b>Глава 4. Фотон-нейтринные процессы в плотной замагниченной</b>		
	<b>среде . . . . .</b>	<b>102</b>
4.1.	Введение . . . . .	102
4.2.	Вычисление амплитуд . . . . .	104
4.3.	Нейтринная светимость . . . . .	106
4.3.1.	Процесс $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ . . . . .	108
4.3.2.	Процесс $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . . . . .	114
4.3.3.	Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . . . . .	115
4.4.	Обсуждение . . . . .	116
<b>Глава 5. Резонансные процессы в замагниченной среде . . . . .</b>		
	<b>121</b>	<b>121</b>
5.1.	Введение . . . . .	121
5.2.	Резонансное рождение аксионов в магнитосфере магнитара . . . . .	122
5.3.	Резонанс на виртуальном заряженном фермионе . . . . .	128
5.3.1.	Факторизация $S$ - матричного элемента . . . . .	128
5.3.2.	Реакция резонансного рассеяния $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . . . . .	130
5.3.3.	Резонансное рождение нейтрино-антинейтринных пар в комптоподобном процессе $\gamma e \rightarrow \nu\bar{\nu}e$ . . . . .	135
5.4.	Резонансный механизм рождения $e^+e^-$ пар в полярной шапке магнитара . . . . .	138
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>146</b>
<b>Приложение А. Результаты для <math>\mathcal{R}_{k'k}^{s's}</math> . . . . .</b>		<b>150</b>
<b>Приложение Б. Пропагатор фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле . . . . .</b>		<b>191</b>

Приложение В. Результаты для $\mathcal{T}_k^{s''s}$ . . . . .	194
Приложение Г. Вычисление амплитуды рассеяния фотона на электронах замагниченной плазмы с излучением двух фотонов . .	197
Приложение Д. Свойства матриц $\Pi_{\pm}$ . . . . .	204
Список литературы . . . . .	206

## Введение

В настоящее время является установленным фактом, что наличие магнитного поля в широком классе астрофизических объектов представляет типичную ситуацию для наблюдаемой Вселенной. При этом масштаб напряженности магнитного поля может варьироваться в очень широких пределах: от крупномасштабных ( $\sim 100$  килопарсек) межгалактических магнитных полей  $B \sim 10^{-21}$  Гс [1], до полей  $B \sim 10^{17}$  Гс, реализующихся в сценарии ротационного взрыва сверхновой Г.С. Бисноватого-Когана [2, 3]. Среди всего многообразия объектов, обладающих магнитными полями особый интерес представляют объекты с полями масштаба так называемого критического значения  $B_e = m^2/e \simeq 4.41 \times 10^{13}$  Гс<sup>1</sup>. К ним, в частности, относятся изолированные нейтронные звезды, включающие в себя радиопульсары и так называемые магнитары, обладающими магнитными полями с индукцией от  $10^{12}$  Гс (радиопульсары) до  $4 \times 10^{14}$  Гс (магнитары). Недавние наблюдения позволяют, в частности, отождествить некоторые астрофизические объекты, такие как источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) и аномальные рентгеновские пульсары (AXP), с магнитарами [4–9]. Согласно наиболее известной в настоящее время модели (см., например, [10–14]) в окрестности таких объектов возможно существование сильного магнитного поля, достигающего величины  $10^{15} - 10^{16}$  Гс. Отметим однако, что для нейтронных звезд существует верхняя граница возможных напряженностей магнитного поля, определяемая посредством равенством энергии магнитного поля и гравитационной энергии связи нейтронной звезды:  $B \simeq \sqrt{6G_N} M_{NS} / R_{NS}^2 \sim 10^{18}$  Гс, где  $G_N$  – гравитационная постоянная,  $M_{NS}$  и  $R_{NS}$  – масса и радиус нейтронной звезды соответственно. Более сильные стационарные магнитные поля, по-видимому, не могут существовать в нейтронных звездах.

Кроме того, анализ спектра излучения объектов типа SGR и AXP сви-

---

<sup>1</sup> Мы используем систему единиц  $c = \hbar = 1$ .  $e > 0$  – элементарный заряд,  $m$  – масса электрона.

детельствует также о наличии многокомпонентной (электрон-позитронной или ионной) плазмы в оболочке радио-пульсаров с минимальной концентрацией в магнитосфере порядка значения концентрации Голдрайха-Джулиана [15]:

$$n_{GJ} \simeq 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3} \left( \frac{B}{100B_e} \right) \left( \frac{10 \text{ сек}}{P} \right), \quad (1)$$

$P = 2\pi/\Omega$  – период вращения нейтронной звезды.

С другой стороны, в окрестности магнитара оценка концентрации для электронной компоненты в области закрытых силовых линий дает [14, 16]

$$\begin{aligned} n &\sim \left( \frac{1}{R_{NS}\Omega} \right) n_{GJ} \simeq \\ &\simeq 3 \cdot 10^5 \left( \frac{0.1 \text{ рад/с}}{\Omega} \right) \left( \frac{10 \text{ км}}{R_{NS}} \right) n_{GJ} \gg n_{GJ}. \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что и в недрах магнитаров, так же, как и в обычных нейтронных звездах, по-видимому, присутствует сверхплотная материя из электронов, протонов, нейтронов и других, возможно даже экзотических частиц (см. обзор [17] и цитируемые там работы).

Следует отметить, что кроме магнитного поля в нейтронных звездах присутствует и вторая компонента электромагнитного поля – электрическое поле. Поскольку, в отличие от магнитного, для электрического поля значение  $\mathcal{E}_e = V_e$  является предельным, то генерация в макроскопической области пространства электрического поля порядка критического приведет к интенсивному рождению электрон-позитронных пар из вакуума. С одной стороны, в конфигурации, где электрическое поле направлено перпендикулярно магнитному, электрическое поле  $\mathcal{E}$  может превышать критическое значение  $V_e$ , оставаясь при этом меньше  $V$ . Но в этом случае преобразованием Лоренца всегда можно перейти в систему отсчета, где есть только магнитное поле. С другой стороны, если электрическое поле направлено параллельно магнитному (такая ситуация имеет место, например, в области полярных шапок радиопульсаров и магнитаров), его невозможно устранить преобразованием Лоренца, не меняя при этом конфигурацию магнитного поля. Однако во всех рассматриваемых в настоящее время

моделях магнитосфер нейтронных звезд имеет место следующее неравенство:  $\mathcal{E} \ll B$ . Таким образом, при расчете квантовых процессов в приложении к астрофизике замагниченных нейтронных звезд достаточно учитывать только магнитное поле. Это утверждение можно обобщить и на случай замагниченной плазмы, движущейся, как целое, вдоль магнитного поля с четырёх-скоростью  $u_\alpha$ . При этом условие, что в такой системе отсутствует электрическое поле, может быть записано в релятивистски-ковариантном виде.

Понимание определяющей роли квантовых процессов в динамике замагниченных нейтронных звезд стало важнейшим стимулом прогресса в астрофизике элементарных частиц – одной из бурно развивающихся физических наук. Особенно важно учитывать воздействие внешнего поля и плазмы на квантовые процессы, где в конечном или начальном состоянии могут присутствовать как электрически заряженные, так и электрически нейтральные частицы, например, электроны, фотоны или нейтрино. Воздействие внешнего поля на такие процессы обусловлено как чувствительностью заряженных фермионов (в первую очередь электронов, как частиц с наибольшим удельным зарядом) к влиянию поля, так и тем фактом, что сильно замагниченная плазма существенно меняет дисперсионные свойства частиц, а значит, и их кинематику [18–23].

Существует последовательный метод учета влияния плазмы на квантовые процессы, основанный на использовании техники функций Грина (см., например, обзор [24]). При этом непосредственное построение функций Грина для конкретной макроскопической системы может производиться двумя способами. Первый способ, называемый еще формализмом реального времени, является наиболее универсальным и состоит в том, что строится временная функция Грина с использованием диаграммной техники Келдыша [25], причем получаемые при этом уравнения для гриновских функций аналогичны по своему смыслу кинетическим уравнениям. Второй способ, известный, как представление мнимого времени, позволяет построить температурные функции Грина на основе диаграммной техники, применяемой в квантовой теории поля [26, 27]. Способ

учета влияния плазмы, используемый в настоящей диссертации, наиболее близок по своей основе формализму реального времени. Суть его состоит в том, что рассматриваются когерентные рассеяния нейтральных частиц (фотонов, нейтрино и т.п.) на реальных фермионах (например, электронах и позитронах) среды без изменения их состояния (рассеяние «вперед»). Этот способ эквивалентен методу функций Грина, но значительно упрощает вычисления.

Среди квантовых процессов, свойства которых существенно, а иногда принципиально изменяются под воздействием внешней активной среды, особый интерес для астрофизики представляют одно-, двух- и трехвершинные процессы. Это обусловлено тем, что с точки зрения влияния микрофизических процессов на макроскопические характеристики астрофизических объектов (например, скорость потери энергии, число рождаемых частиц, коэффициент диффузии и т.п.) существенными будут лишь те реакции, которые дают лидирующие по константам связи вклады.

Исследование процессов с одной, двумя и тремя вершинами во внешней активной среде имеет длинную историю. Так, изучение важнейшей реакции черенковского излучения,  $e \rightarrow e\gamma$ , берущее свое начало с пионерской работы [28], не прекращается до сих пор [22, 29–31]. Другими одновершинными процессами, имеющими большое, с точки зрения астрофизики, прикладное значение, являются реакции, где в конечном состоянии присутствуют нейтрино или аксионы. Так, «синхротронное» излучению нейтринных пар  $e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  было, по-видимому, впервые рассмотрено в работе [32] для ситуации относительно слабого магнитного поля, когда энергия начальной частицы является доминирующим параметром,  $E^2 \gg eB$  и в дальнейшем было продолжено в работах [17, 33] в приложении к теории остывания нейтронных звезд. Другой реакцией того же типа является нейтринное рождение электрон-позитронных пар,  $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$  [34]. Позднее указанные процессы исследовались в приближении слабого поля в работах [35–44]. В работах [40, 41] процесс  $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$  также исследовался при произвольных значениях магнитного поля и, в частности, в пределе сильного

поля  $eB \gg E_\nu^2$ , когда электрон и позитрон могут рождаться только в состояниях, соответствующих основному уровню Ландау. Реакции с участием аксионов в конечном состоянии  $e \rightarrow ea$  и  $\gamma \rightarrow a$  исследовались в магнитном поле и плазме в работах [45, 46]. Следует отметить, что все вышеуказанные процессы оказываются разрешенными только при наличии внешней среды.

Исследование двухвершинных процессов, к которым относятся, в частности, комптоновское рассеяние,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , ведет свое начало с 30-х годов XX века и не прекращается по настоящее время (см., например, [47–50]). Так, в присутствии внешнего магнитного поля и плазмы виртуальный электрон в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  становится нестабильным, что приводит к эффекту резонанса [51, 52]. Другой древесный комптоноподобный процесс,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , также не был обделен вниманием теоретиков. Этот процесс изучался как в вакууме, так во внешнем магнитном поле. В этой связи нельзя не отметить определенные трудности вычисления амплитуд комптоноподобных процессов в постоянном однородном магнитном поле произвольной напряженности. В настоящей диссертации используется метод, когда парциальные вклады в амплитуду от каналов с различными значениями поляризационных состояний фермионов вычисляются отдельно, путём непосредственного перемножения биспиноров и матриц Дирака. Такой подход представляет собой альтернативу технике, согласно которой амплитуды возводятся в квадрат и суммируются по поляризационным состояниям с использованием матрицы плотности для фермионов, см., например [53, 54].

Среди петлевых двухвершинных процессов особое место занимает поляризационный оператор фотона во внешнем поле, который исследовался в начале 70-х в работах [55–58], см. также [59], где было получено выражение для вклада в поляризационный оператор от замагниченной плазмы. Именно поляризационный оператор определяет изменение поляризационных и дисперсионных свойств фотона во внешней активной среде. С другой стороны, при изучении резонансных эффектов в магнитном поле и плазме оказывается важным учет радиационных поправок к массе фермиона, что сводится к расчету массового

оператора фермиона, как еще одной петлевой двухвершинной диаграмме. Мас-совый оператор вычислялся как в магнитном поле [60], так и в присутствии замагниченной среды [61].

Фотон-нейтринные процессы  $\nu \rightarrow \nu\gamma$ ,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  изучались в случаях как сильных, так и относительно слабых полей, а также в общем случае в работах [62–74]. Наиболее общие выражения для амплитуд двухвершинного петлевого процесса в постоянном однородном магнитном поле произвольной напряженности и скрещенном поле с различными комбинациями вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов были получены в работе [75].

Самым ярким, по нашему мнению, трехвершинным петлевым процессом, в течение многих лет находящимся в поле внимания теоретиков, является расщепление фотона на два фотона в магнитном поле и/или плазме,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , которое в вакууме запрещено кинематически. Этому процессу посвящен обзор [76], где можно найти подробный список ранних статей, среди относительно недавних работ укажем [77–80]. В работах [81, 82] было показано, что учет дисперсионных свойств фотонов в сильном магнитном поле существенно изменяет кинематику процесса, и, как следствие, соотношение вероятностей различных поляриза-ционных каналов.

Совершенно понятно, что вычисление каких-либо микропараметров (вероятность, нейтринная излучательная способность и т.д.) в изложенных выше экзотических условиях без приложения к решению проблем ряда астрофизических моделей будет оставаться «вещью в себе». Из всего множества макроскопических задач, которые могут быть поставлены в таких условиях, мы можем выделить несколько основных. Одной из них является задача самосогласованного описания процесса генерации радиоизлучения в магнитосферах радиопульсаров и магнитаров. Согласно общепринятой модели, для формирования радиоизлучения в таких объектах необходима эффективная генерация электрон-позитронной плазмы в их магнитосферах [83], причем предполагае-

мые механизмы рождения  $e^+e^-$ -пар в радиопульсарах и магнитарах очень похожи (см., например, [16, 84–87]). Однако, как было показано в работах [57, 88, 89], при аккуратном учете дисперсионных свойств фотонов возможен эффект так называемого захвата фотона магнитным полем (гамма-квант начинает двигаться вдоль силовой линии магнитного поля), что приводит, в конечном итоге, к невозможности генерации  $e^+e^-$ -пар стандартным механизмом. С другой стороны, в условиях горячей и/или сверхплотной материи условие, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи, может не выполняться. В этом случае во внешней активной среде становятся возможными резонансные переходы, запрещенные или сильно подавленные в вакууме. Это позволяет реализовать эффективный механизм рождения электрон-позитронной плазмы в магнитосферах замагниченных нейтронных звезд посредством комптоноподобного процесса  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$ .

Другой принципиальной проблемой в физике сильно замагниченных нейтронных звезд является описание вспышечной активности SGR. Согласно общепринятой модели [12, 13], в магнитосфере магнитара вблизи его поверхности формируется относительно долго живущая область, занятая захваченной магнитным полем горячей  $e^+e^-$  плазмой и находящимися в термодинамическом равновесии с ней фотонами (так называемый «trapped fireball»), которая относительно медленно остывает за счет испускания нейтрино и фотонов. Последние и формируют наблюдаемый мягкий спектр излучения в режиме «long tail», причем на форму этого спектра, по видимому, должна оказывать влияние зависимость коэффициента поглощения фотона от энергии и температуры. Эта зависимость определяется температурным профилем горячей электрон-позитронной плазмы в области излучения во время всплесков в SGRs [12, 90]. К процессам, дающим основной вклад в коэффициент поглощения фотона в условиях вспышки SGR относятся, в частности, процессы рассеяния ( $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$ ), расщепления ( $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ ) и слияния ( $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$ ) фотонов. Аккуратный учет дисперсионных свойств фотонов в рассматриваемых условиях позволяет внести суще-

ственные коррективы в рамки микрофизического моделирования источников мягких повторяющихся гамма-всплесков.

Не менее интересными для исследования являются квантовые процессы, где в конечном состоянии находятся электрически нейтральные частицы, такие, как нейтрино и аксионы. Важность процессов с участием нейтрино постоянно обсуждается в литературе [91–98]. Особый интерес вызывает влияние нейтрино на макрофизику таких объектов, как нейтронные звезды. Рождаясь в результате взрыва сверхновой очень горячей (внутренняя температура  $T \sim 10^{11}$  К), нейтронная звезда постепенно остывает. Поскольку после двадцати секунд после рождения звезда становится прозрачной для нейтрино, основным механизмом охлаждения нейтронной звезды в течении  $10^6$  лет жизни будут реакции с участием нейтрино [99–102]. С другой стороны, сильное внешнее магнитное поле может существенно повлиять на количество энергии, уносимое нейтрино из единицы объема за единицу времени (так называемая нейтринная излучательная способность) и, возможно, изменить поведение кривых остывания для магнитаров. Как было показано в [103], магнитары могут остывать значительно быстрее, чем нейтронные звезды с полями меньше критического значения. Один из возможных способов решения проблемы состоит во введении внутреннего источника нагрева. Другой подход, на который указывается в настоящей диссертации, состоит в ограничении сверху величины магнитного поля, при котором нейтринная излучательная способность на ранней стадии остывания магнитара будет мало отличаться от случая нейтронной звезды с полем  $\sim 10^{12}$  Гс.

В приложении к магнитарам представляет интерес также поиск новых частиц, существование которых выходит за рамки Стандартной модели, например, аксионов. Аксион, предложенный Печчеи и Куинн [104] для решения проблемы сохранения CP инвариантности сильных взаимодействий, остается в настоящее время не только самым привлекательным решением проблемы CP, но и наиболее вероятным кандидатом на роль холодной темной материи Вселен-

ной [105]. Поскольку масштаб нарушения симметрии Печчеи – Куинн,  $f_a$ , оказывается велик, аксионы очень слабо взаимодействуют с веществом (константа взаимодействия  $f_a^{-1} \lesssim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-1}$  [106]). В этой связи возникают определенные трудности на пути экспериментального обнаружения аксиона.

Основная идея таких экспериментов заключается в следующем: во внешнем электромагнитном поле и плазме становятся возможными переходы аксион  $\rightarrow$  фотон и обратно (так называемая конверсия Примакова [107, 108]). Эксперименты, основанные на этом эффекте, были впервые предложены в работах [109, 110] для регистрации аксионов, источниками которых могут быть галактические гало. В качестве еще одного источника аксионов рассматривается Солнце, где аксионы с характерной энергией порядка нескольких кэВ могут рождаться в результате конверсии тепловых фотонов в присутствии флуктуирующего электромагнитного поля и плазмы. В этом случае необходимо детектировать фотоны в области энергий порядка 1 кэВ, рождающиеся при конверсии аксион  $\rightarrow$  фотон в сильном статическом магнитном поле. Еще один класс экспериментов основан на измерении осцилляций аксион  $\rightarrow$  фотон и фотон  $\rightarrow$  аксион. Эти осцилляции приводят к явлению смешивания аксионного и фотонного состояний в магнитном поле [111]. Такая идея по измерению изменения числа фотонов в пучке, распространяющемся во внешнем поле, за счет появления смеси аксионной и фотонной составляющих была предложена в работах [112–114]. Несмотря на то, что в настоящее время результаты всех этих экспериментов являются отрицательными, они позволяют получить определенные ограничения на параметры аксиона (см., например, недавние работы [115–118]).

Поэтому представляет особый интерес рассматривать квантовые процессы с участием аксионов в экстремальных условиях сильного магнитного поля и плазмы, поскольку внешняя активная среда в зависимости от значений ее параметров (температуры  $T$ , химического потенциала  $\mu$  или индукции магнитного поля  $B$ ), может как катализировать эти реакции так и оказывать дополнительное (к  $f_a^{-1}$ ) их подавление. Теоретическим исследованиям, направленным

на изучение процессов взаимодействия аксионов с такого типа внешней средой и получение возможных ограничений на параметры аксиона было посвящено большое число работ [119–126].

Следовательно, влияние замагниченной плазмы на микрофизику должно учитываться как в моделях магнитосфер, так при моделировании остывания сильно замагниченных нейтронных звёзд.

Настоящая диссертация посвящена исследованию квантовых процессов с участием нейтрино, фотонов и аксионов во внешней активной среде с учетом возможных резонансных эффектов. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, пяти приложений и списка литературы.

Первая глава посвящена исследованию обобщенного комптоноподобного процесса  $jf \rightarrow j'f'$ , где  $f$  и  $f'$  – начальный и конечный фермионы, находящиеся на произвольных уровнях Ландау,  $j$  и  $j'$  – обобщенные токи скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов, в постоянном однородном магнитном поле. Впервые получены наиболее общие выражения для амплитуд данного процесса, представленные в явном калибровочно- и лоренц-инвариантном виде. Рассмотрены частные случаи сверхсильного магнитного поля, когда все фермионы (реальные и виртуальные) занимают основной уровень Ландау, и когерентного рассеяния тока  $j$  «вперед» без изменения состояний фермионов. Последний результат позволяет обобщить имеющиеся в литературе выражения для амплитуд перехода  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  в магнитном поле на случай произвольно замагниченной плазмы.

Вторая глава посвящена процессу комптоновского рассеяния в сильно замагниченной плазме, когда начальный и конечный электроны (позитроны) находятся на основном уровне Ландау. Именно, процесс рассеяния фотона  $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$  исследуется в сильно замагниченной среде произвольной температуры и химического потенциала. Получены простые выражения для коэффициентов поглощения в сильно замагниченной плазме в двух предельных случаях разреженной зарядово-симметричной и вырожденной плазмы с учетом дисперсии и

перенормировки волновых функций фотонов. Проведено сравнение коэффициентов поглощения фотонов в процессе расщепления фотона и в процессе комптоновского рассеяния.

В третьей главе исследуются петлевые процессы с участием фотонов в сильно замагниченной плазме и, в частности, проводится анализ процесса расщепления фотона на два фотона,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , в горячей замагниченной среде, включая исследование дисперсионных свойств фотона в поле и плазме и возможные астрофизические приложения. В частности, вычислена амплитуда процесса расщепления фотона  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , проанализирована кинематика и найдены правила отбора по поляризациям. Для разрешенных каналов расщепления вычислены соответствующие вероятности с учетом дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов в общем случае, когда распадающийся фотон распространяется под произвольным углом по отношению к направлению магнитного поля. Полученные результаты показывают, что присутствие плазмы, с одной стороны, существенным образом изменяет правила отбора по поляризациям по сравнению со случаем чистого магнитного поля. В частности, становится возможным новый канал расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , запрещенный в отсутствие плазмы. С другой стороны, из численных расчетов и полученных асимптотических формул следует, что горячая плазма оказывает подавляющее влияние на каналы  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$ . Тем не менее, как оказалось, холодная зарядово-симметричная плазма в сочетании с сильным магнитным полем способна усилить вероятность расщепления по этим каналам по сравнению с чистым магнитным полем.

В четвертой главе рассмотрено влияние сильно замагниченной плотной плазмы на фотон-нейтринные процессы  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm \nu \bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и впервые получены инвариантные амплитуды реакций  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ . В частном случае холодной плазмы вычислены вклады рассматриваемых процессов в нейтринную светимость с учетом изменения дисперсионных свойств фотонов в замагниченной среде. Предложен методический прием вычисления

светимости фотонейтринного процесса,  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu}$ , через ширину поглощения фотона. На основе изложенной методики показано, что в случае релятивистской плазмы нейтринная светимость за счет процесса  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu}$  существенно модифицируется по сравнению с имеющимися в литературе результатами. Показано, что в случае холодной плазмы вклад в нейтринную излучательную способность процесса  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  будет сильно подавлен по сравнению со вкладами фотонейтринного процесса и процесса конверсии фотона. Исходя из возможной модификации кривой охлаждения нейтронной звезды за счет изменения нейтринной светимости в сильном магнитном поле делается предположение об ограничении на величину индукции магнитного поля во внешней коре магнитара.

Пятая глава посвящена исследованию резонансных процессов в замагниченной среде. В частности, рассмотрены два возможных типа резонансов (на виртуальных фотоне и электроне), которые могут давать основной вклад в физически наблюдаемые характеристики, такие как светимость и число рождаемых частиц. В этой главе рассматривается влияние замагниченной плазмы на процесс резонансного фоторождения аксионов на заряженных компонентах среды,  $i \rightarrow f + a$ . Показано, что аксионная светимость в области резонанса за счет всевозможных реакций с участием частиц среды однозначно выражается через светимость перехода фотон  $\rightarrow$  аксион. Найдено число аксионов, рождаемых равновесным реликтовым излучением в магнитосфере магнитара. Показано, что в противовес ранее сделанным в литературе выводам, рассмотренный резонансный механизм не эффективен для производства холодной скрытой массы. Кроме того, проведено исследование процесса рассеяния  $\gamma e^{\pm} \rightarrow \gamma e^{\pm}$  и комптоноподобного процесса  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm} e^+ e^-$  рождения электрон-позитронной пары при взаимодействии ультрарелятивистского электрона с мягким рентгеновским фотоном в окрестности полярной шапки магнитара с учетом возможных резонансных эффектов. Для процесса  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm} e^+ e^-$  получено простое аналитическое выражение для коэффициента поглощения электрона. Получена оценка возможной эффективности процесса рождения пар для генерации в магнито-

сфере электрон-позитронной плазмы.

В Заключение сформулированы основные результаты диссертации.

В Приложении А приведены факторы  $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ , входящие в выражения для обобщенных амплитуд процесса  $jf \rightarrow j'f'$  с токами  $j$  и  $j'$  скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов.

В Приложении Б приводится выражение для пропагатора фермиона в магнитном поле с учетом радиационных поправок в виде суммы по уровням Ландау.

В Приложении В приведены факторы  $\mathcal{T}_k^{s''s}$  входящие в выражения для одновершинных амплитуд процесса  $f \rightarrow jf'$

В Приложении Г приводится вычисление амплитуды рассеяния фотона на электронах замагниченной плазмы с излучением двух фотонов.

В Приложении Д даны некоторые свойства проекционных операторов  $\Pi_{\pm}$ , входящих в выражение для пропагатора электрона в магнитном поле.

*Основные обозначения, используемые в диссертации*

Используется 4-метрика с сигнатурой  $(+ - - -)$ , а также система единиц  $\hbar = 1$ ,  $c = 1$ ,  $k_B = 1$ .

Элементарный заряд:  $e = |e|$ , заряд фермиона:  $e_f$ , масса фермиона:  $m_f$ , масса электрона  $m$ ,  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры,  $G_F$  – константа Ферми.

Тензор внешнего поля:  $F_{\alpha\beta}$ , дуальный тензор:  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

Обезразмеренный тензор магнитного поля:  $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$ , дуальный обезразмеренный тензор:  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$ .

У 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например:

$$(pFFp) = p^\alpha F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta; \quad (FFp)_\alpha = F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta; \quad (FF) = F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}.$$

Безразмерные тензоры  $\Lambda_{\alpha\beta} = (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$  связаны соотношением  $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ .

В системе отсчета, где имеется только магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль третьей оси, 4-векторы с индексами  $\perp$  и  $\parallel$  относятся к подпространствам Евклида  $\{1, 2\}$  и Минковского  $\{0, 3\}$  соответственно. При этом

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \text{diag}(0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 0, 0, -1).$$

Для произвольных векторов  $p_\mu$ ,  $q_\mu$  имеем:

$$p_\perp^\mu = (0, p_1, p_2, 0), \quad p_\parallel^\mu = (p_0, 0, 0, p_3),$$

$$(pq)_\perp = (p\Lambda q) = p_1q_1 + p_2q_2, \quad (pq)_\parallel = (p\tilde{\Lambda}q) = p_0q_0 - p_3q_3.$$

Остальные обозначения те же, что приняты в книге [127].

## Глава 1

# Обобщенная двухвершинная древесная амплитуда $jf \rightarrow j'f'$ в замагниченной среде

## 1.1. Введение

Как было отмечено ранее (см. Введение к настоящей диссертации), исследование двухвершинных процессов во внешней активной среде (в электромагнитном поле и/или плазме) имеет довольно длинную историю. Так, наиболее общие выражения для амплитуд двухвершинного петлевого процесса  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  в постоянном однородном магнитном поле и в скрещенном поле для различных комбинаций взаимодействий обобщенных токов  $j$  и  $j'$  скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов с фермионами были получены в работе [75] (см. также [128]). При этом обобщенный ток  $j$  имеет смысл полевого оператора бозона или фермионного тока, например, ток нейтрино.

Типичный пример процесса в древесном приближении с двумя векторными вершинами в присутствии замагниченной плазмы – это комптоновское рассеяние как возможный канал формирования радиационного спектра излучения нейтронной звезды [129]. В этом случае оба тока в импульсном представлении  $j$  и  $j'$  имеют смысл векторов поляризации фотонов. Этот процесс рассматривался неоднократно, см., например, обзоры [128, 130]. В частности, в работе [130] выражение для амплитуды комптоновского рассеяния для случая, когда начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау, было представлено в явном лоренц-инвариантном виде. Другим примером комптоноподобного процесса с векторной и аксиально-векторной вершинами является распад фотона на нейтринную пару,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  [73, 74]. Такой процесс для случая замагниченной плазмы, когда все электроны (реальные и виртуальный) могут находиться на произвольных уровнях Ландау, и в локальном пределе слабого

взаимодействия был рассмотрен в работе [131]. Однако результаты в этой работе представлены в довольно громоздкой форме, не обладающей явной лоренц-инвариантностью, и мало пригодны для анализа других процессов рассеяния фотонов на фермионах с рождением экзотических частиц, таких как аксионы, нейтралино и т.д. Отметим, что в процессе  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  начальный обобщенный ток  $j$  имеет смысл вектора поляризации фотона, тогда как конечный обобщенный ток  $j'$  имеет смысл нейтринного тока.

Поэтому представляет интерес получение в древесном приближении двух-вершинных амплитуд для рассеяния типа  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и присутствии плазмы, состоящей из заряженных фермионов для различных комбинаций вершин, которые были рассмотрены в работе [75]. В частности, мы обобщаем результаты работы [75] на случай замагниченной плазмы, поскольку такая ситуация выглядит наиболее реалистичной в приложении к подавляющему большинству моделей астрофизических объектов [106, 132, 133]. Отметим, что для случая двух векторных вершин такое обобщение было сделано в [59] для поляризационного оператора фотона в замагниченной электрон-позитронной плазме.

План главы такой: в разделе 1.2 проводятся вычисления амплитуд рассеяния для различных спиновых состояний начального и конечного фермионов и для вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов. Все амплитуды представлены в явном лоренц- и калибровочно-инвариантном виде. В разделе 1.3 рассмотрен частный случай, когда все начальные фермионы занимают основной уровень Ландау, а виртуальный фермион может находиться на произвольном уровне. Когерентное рассеяние нейтральных частиц на реальных фермионах без изменения их состояния (рассеяние «вперёд») рассмотрено в разделе 1.4. Заключительные комментарии и обсуждение полученных результатов и их возможных физических приложений приведены в разделе 1.5.

Результаты данной главы опубликованы в работах [128, 134–140].

## 1.2. Вычисление амплитуды перехода $jf \rightarrow j'f'$

Для анализа обобщенной амплитуды перехода  $jf \rightarrow j'f'$  будет использоваться эффективный локальный лагранжиан взаимодействия обобщенного тока  $j$  с фермионами  $f$  в следующей форме

$$\mathcal{L}(x) = \sum_k g_k [\bar{\psi}_f(x) \Gamma_k \psi_f(x)] J_k(x), \quad (1.1)$$

где индекс  $k = S, P, V, A$  соответствует матрицам  $\Gamma_k$ :  $\Gamma_S = 1$ ,  $\Gamma_P = \gamma_5$ ,  $\Gamma_V = \gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_A = \gamma_\alpha \gamma_5$ ;  $J_k(x)$  – операторы обобщенных токов ( $J_S$ ,  $J_P$ ,  $J_{V\alpha}$  или  $J_{A\alpha}$ ),  $g_k$  – соответствующие константы взаимодействия и  $\psi_f(x)$  – операторы фермионного поля.

Действительно, используя лагранжиан (1.1) можно описать большой класс взаимодействий, например:

а) лагранжиан электромагнитного взаимодействия, когда  $k = V$ ,  $g_V = -e_f$ ,  $\Gamma_V J_V = \gamma^\mu A_\mu$ ,  $A^\mu$  – четырехмерный потенциал квантованного электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}(X) = -e_f [\bar{\psi}_f(X) \gamma^\mu A_\mu(X) \psi_f(X)]; \quad (1.2)$$

б) лагранжиан фермион-аксионного взаимодействия, когда  $k = A$ ,  $g_A = C_f/(2f_a)$ ,  $\Gamma_A J_A = \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu a(X)$ ,  $a(X)$  – квантованное поле легкой псевдоскалярной частицы – аксиона,  $f_a$  – масштаб нарушения симметрии Печчеи и Куинн [104],  $C_f$  – модельно зависимый фактор порядка единицы [106]:

$$\mathcal{L}(X) = \frac{C_f}{2f_a} [\bar{\psi}_f(X) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_f(X)] \partial_\mu a(X); \quad (1.3)$$

в) эффективный лагранжиан четырехфермионного слабого взаимодействия, когда  $k = V, A$ ,  $g_V = G_F C_V / \sqrt{2}$ ,  $g_A = G_F C_A / \sqrt{2}$  [141]:

$$\mathcal{L}(X) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_f(X) \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) \psi_f(X)] J_\alpha(X), \quad (1.4)$$

где  $C_V = \pm 1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $C_A = \pm 1/2$ ,  $G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$  – постоянная Ферми,  $\theta_W$  – угол Вайнберга ( $\sin^2 \theta_W \simeq 0.231$ ); верхний знак соответствует

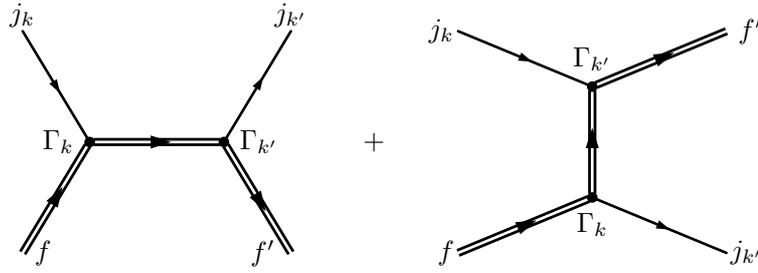


Рис. 1.1. Диаграммы Фейнмана для реакции  $j f \rightarrow j' f'$ . Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов и на фермионный пропагатор учтено точно.

электронному нейтрину ( $\nu = \nu_e$ ), когда в реакции происходит обмен  $W$ - и  $Z$ -бозонами; нижний знак соответствует  $\mu$  и  $\tau$  нейтрину ( $\nu = \nu_\mu, \nu_\tau$ ), когда присутствует лишь обмен  $Z$ -бозоном;  $J_\alpha(X) = \bar{\nu}(X)\gamma_\alpha(1 + \gamma_5)\nu(X)$  – ток левых нейтрино. Отметим, что эффективный лагранжиан (1.4) написан в предположении относительно малых передач импульса по сравнению с массой  $W$ -бозона,  $|q'^2| \ll m_W^2$ , с учетом дополнительного ограничения на величину внешнего магнитного поля  $eB \ll m_W^2$  [22].

В общем случае, исходя из лагранжиана (1.1),  $S$ -матричный элемент процесса  $j f \rightarrow j' f'$ , который в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 1.1, может быть представлен в виде:

$$S_{k'k}^{s's} = -g_k g_{k'} \int d^4 X d^4 Y \langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle \left[ \bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \Gamma_{k'} \hat{S}(Y, X) \Gamma_k \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + (J_k, \Gamma_k \leftrightarrow J_{k'}, \Gamma_{k'}). \quad (1.5)$$

Здесь  $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$  и  $p'^\mu = (E_{\ell'}, \mathbf{p}')$  – четырехмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермиона, находящихся на уровнях Ландау  $\ell$  и  $\ell'$  соответственно,  $\Psi_{p,\ell}^s(X)$  – волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля,  $s$  и  $s'$  обозначают поляризационные состояния начального и конечного фермиона соответственно,  $\hat{S}(Y, X)$  – пропагатор фермиона во внешнем магнитном поле (см. приложение Б), токи между угловыми скобками обозначают матричный элемент между соответствующими начальным и конечным состояниями,  $\langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle = j_k(X) j_{k'}(Y)$ ,  $X^\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ ,

$$Y^\mu = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3).$$

Токи  $j_k(X)$  и  $j_{k'}(Y)$ , в свою очередь, могут быть представлены в виде плосковолновых решений с амплитудами  $j_k(q)$  и  $j'_{k'}(q')$  следующим образом:

$$j_k(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2q_0V}} j_k(q), \quad q^\alpha = (q_0, \mathbf{q}), \quad (1.6)$$

$$j_{k'}(Y) = \frac{e^{i(q'Y)}}{\sqrt{2q'_0V}} j'_{k'}(q'), \quad q'^\alpha = (q'_0, \mathbf{q}'), \quad (1.7)$$

где  $V = L_x L_y L_z$  – нормировочный объем.

Существует несколько возможных способов построения волновых функций фермионов в присутствии внешнего магнитного поля из уравнения Дирака (см., например [142–148], а также [22, 23]). В большинстве случаев эти решения представлены в виде, когда две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной  $1/2$  и  $-1/2$ .

Однако при расчете конкретных характеристик (сечения, ширины, коэффициенты поглощения и т.д.) процессов с двумя и более вершинами во внешнем магнитном поле стандартным методом, включающим возведение в квадрат амплитуды с учетом вклада всех диаграмм, суммирование и усреднение по поляризационным состояниям фермионов, вычисление следов от произведений биспиноров и матриц Дирака, представляет значительные вычислительные сложности. Поэтому оказывается удобным найти парциальные вклады в амплитуду от различных поляризационных состояний фермионов для каждой диаграммы в отдельности непосредственным перемножением биспиноров и матриц Дирака. Если при этом использовать волновые функции фермионов с фиксированной проекцией спина, вычисленные парциальные вклады в амплитуду не будут обладать лоренц-инвариантной структурой при преобразованиях вдоль магнитного поля. Инвариантом будет только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по поляризациям фермионов.

По этой причине оказывается целесообразным использовать решения уравнения Дирака, являющиеся собственными функциями для ковариантного оператора  $\hat{\mu}_z$ . Его можно получить непосредственно из введенного в работе [144] обобщенного оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2} (P_\lambda \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} + \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} P_\lambda), \quad (1.8)$$

где  $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$ , и  $P^\lambda = i\partial^\lambda - e_f A^\lambda = (i\partial_0 - e_f A_0, -i\nabla - e_f \mathbf{A})$  – оператор обобщенного 4-импульса с 4-потенциалом внешнего магнитного поля  $A^\lambda$ . Заметим, что в работе [144] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров  $\psi^\dagger$  и  $\psi$ , тогда как в современной литературе [149] билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ .

При учете того, что в представлении Шредингера уравнение Дирака имеет вид:  $i\partial_0\psi = H\psi$ , где  $H = \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) + m_f \gamma_0 - eA_0$  – гамильтониан Дирака, из компоненты  $F_{\mu\nu 0}$  оператора (1.8) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk0}, \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  – тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (1.9) имеет смысл оператора поляризации [144, 145]. Его можно представить в виде:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = m_f \boldsymbol{\Sigma} + i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \hat{\mathbf{P}}], \quad (1.10)$$

где  $\boldsymbol{\Sigma} = \gamma_0 \gamma_5 \boldsymbol{\gamma}$  – трехмерный оператор спина.

Нетрудно показать, что компоненты оператора (1.10) коммутируют с гамильтонианом, т.е.  $H$  и  $\mu_z$  имеют общие собственные функции. В нерелятивистском пределе оператор (1.10), будучи приведенным к виду  $\hat{\boldsymbol{\mu}}/m_f^2$ , переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента, который имеет явную физическую интерпретацию.

Следовательно, можно построить волновые функции фермионов как собственные функции оператора  $\hat{\mu}_z$  [144, 145]

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z + i\gamma_0 \gamma_5 [\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}]_z, \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{P} = -i\nabla - e_f \mathbf{A}$ .

Такие решения дают возможность построить парциальные амплитуды, которые, с точностью до одинаковой для обеих диаграмм комплексной фазы, будут обладать явной Лоренц-инвариантностью.

Будем работать в системе отсчета, где магнитное поле направлено вдоль оси  $z$  с использованием калибровки Ландау, в которой 4-потенциал имеет вид  $A^\lambda = (0, 0, xB, 0)$ . Удобно ввести следующие обозначения:  $\beta = |e_f|B$  и  $\eta = e_f/|e_f|$ , определяющее знак заряда фермиона. В этом случае собственные функции оператора  $\hat{\mu}_z$  имеют вид:

$$\Psi_{p,\ell}^s(X) = \frac{e^{-i(E_\ell X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} U_\ell^s(\xi)}{\sqrt{4E_\ell M_\ell (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) L_y L_z}}, \quad (1.12)$$

где  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  – квантовое число, характеризующее уровни Ландау,  $p \equiv p_0, p_y, p_z$  – совокупность компонент импульса фермиона,

$$E_\ell = \sqrt{M_\ell^2 + p_z^2}, \quad M_\ell = \sqrt{m_f^2 + 2\beta\ell}, \quad (1.13)$$

и являются решениями уравнения

$$\hat{\mu}_z \Psi_{p,\ell}^s(X) = s M_\ell \Psi_{p,\ell}^s(X), \quad s = \pm 1. \quad (1.14)$$

Удобно представить биспиноры  $U_\ell^s(\xi)$  в виде разложения по решениям для положительного и отрицательного заряда фермиона,  $U_{\ell,\eta}^s(\xi)$ :

$$U_\ell^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2} U_{\ell,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2} U_{\ell,+}^s(\xi), \quad (1.15)$$

где

$$U_{\ell,-}^{-}(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$$U_{\ell,-}^{+}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$U_{\ell,+}^{-}(\xi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$U_{\ell,+}^{+}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$V_\ell(\xi)$  – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита  $H_\ell(\xi)$  [150]:

$$V_\ell(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^\ell \ell!} \sqrt{\pi}} H_\ell(\xi), \quad \xi = \sqrt{\beta} \left( X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (1.20)$$

Для дальнейших вычислений удобно также, ввести волновые функции  $\phi_{p,\ell}^s(X_1)$ , связанные с  $U_\ell^s(\xi)$  следующим образом:

$$\phi_{p,\ell}^s(X_1) = \frac{U_\ell^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_\ell(E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)}}. \quad (1.21)$$

С учетом этих замечаний, подставляя решения (1.12), фурье-образы токов (1.6), пропагатор (Б.1) – (Б.3) в (1.5) и интегрируя по  $dX_0 dX_2 dX_3$  и  $dY_0 dY_2 dY_3$ , представим матричный элемент в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{k'k}^{s's} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{\sqrt{2q_0 V 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E_{\ell'} L_y L_z}} \mathcal{M}_{k'k}^{s's}, \quad (1.22)$$

где  $\delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') = \delta(P_0 - E_{\ell'} - q'_0) \delta(P_y - p'_y - q'_y) \delta(P_z - p'_z - q'_z)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k}^{s's} &\simeq i g_k g_{k'} j_{k'}'(q') j_k(q) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''} \int dX_1 dY_1 e^{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x} \times \\ &\times \frac{\bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \Gamma_{k'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} + \\ &+ (j_k(q), \Gamma_k, P, q \leftrightarrow j_{k'}'(q'), \Gamma_{k'}, P', -q'), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$P_\alpha = (p + q)_\alpha, \quad P'_\alpha = (p - q')_\alpha, \quad \alpha = 0, 2, 3.$$

Анализ амплитуды (1.23) позволяет выделить две возможные ситуации.

*i)* Если  $\ell, \ell' < n$ , существуют решения уравнения  $P_{\parallel}^2 - M_n^2 = 0$ , т.е. виртуальный фермион становится реальным с определенным законом дисперсии и имеет место резонанс на виртуальном фермионе. При этом, в случае малости  $\Im_{\Sigma}^{s''}(P)$  по сравнению с реальной частью везде, кроме точки резонанса, основной вклад в амплитуду (1.23), в случае узкого резонансного пика, будет давать только первая диаграмма на рис. 1.1. Данная ситуация будет рассмотрена в разделе 5.3 главы 5.

*ii)* При  $\ell, \ell' \geq n$  реальная часть знаменателя  $P_{\parallel}^2 - M_n^2$  в (1.23) не обращается в ноль, что говорит о невозможности реализации резонанса на виртуальном фермионе.

В этом случае амплитуду (1.23) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{k'k}^{s's} &= \frac{-\exp[-i\theta]}{2\sqrt{M_\ell M_{\ell'}(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f)}} \times \\
&\times \left\{ \exp\left[\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}}\right]^{-\ell} \left[\frac{q'_y - iq'_x}{\sqrt{q_\perp'^2}}\right]^{-\ell'} \times \right. \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}}\right)^n \frac{\mathcal{R}_{k'k}^{(1)s's}}{P_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} + \\
&+ (-1)^{\ell+\ell'} \exp\left[-\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left[\frac{q'_y + iq'_x}{\sqrt{q_\perp'^2}}\right]^{-\ell} \left[\frac{q_y - iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}}\right]^{-\ell'} \times \\
&\times \left. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}}\right)^n \frac{\mathcal{R}_{kk'}^{(2)s's}}{P_\parallel'^2 - m_f^2 - 2\beta n} \right\}, \tag{1.24}
\end{aligned}$$

где  $\theta = (q_x - q'_x)(p_y + p'_y)/(2\beta)$  – общая фаза для обеих диаграмм на рис. 1.1.

Основная часть задачи состоит в вычислении величин  $\mathcal{R}_{k'k}^{(1,2)s's}$ , которые выражаются через следующие лоренц-коварианты и инварианты в подпространстве  $\{0, 3\}$ :

$$\mathcal{K}_{1\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p') + M_\ell M_{\ell'}}} \left\{ M_\ell (\tilde{\Lambda}p')_\alpha + M_{\ell'} (\tilde{\Lambda}p)_\alpha \right\}, \tag{1.25}$$

$$\mathcal{K}_{2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p') + M_\ell M_{\ell'}}} \left\{ M_\ell (\tilde{\varphi}p')_\alpha + M_{\ell'} (\tilde{\varphi}p)_\alpha \right\}, \tag{1.26}$$

$$\mathcal{K}_3 = \sqrt{2 \left[ (p\tilde{\Lambda}p') + M_\ell M_{\ell'} \right]}, \tag{1.27}$$

$$\mathcal{K}_4 = -\sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p') + M_\ell M_{\ell'}}} (p\tilde{\varphi}p'). \tag{1.28}$$

При вычислениях был использован следующий интеграл [150]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dZ e^{-Z^2} H_n\left(Z + \frac{q_y + iq_x}{2\sqrt{\beta}}\right) H_\ell\left(Z - \frac{q_y - iq_x}{2\sqrt{\beta}}\right) = \\
&= 2^{(n+\ell)/2} \sqrt{n! \ell!} \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}}\right]^{n-\ell} e^{q_\perp^2/(4\beta)} \mathcal{I}_{n,\ell}\left(\frac{q_\perp^2}{2\beta}\right), \tag{1.29}
\end{aligned}$$

где, для  $n \geq \ell$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \\ \mathcal{I}_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} \mathcal{I}_{n,\ell}(x),\end{aligned}\tag{1.30}$$

и  $L_n^k(x)$  – обобщенные полиномы Лагерра [150].

В приложении А представлен полный набор величин  $\mathcal{R}_{k'k}^{(1,2)s's}$  для  $jff$  взаимодействия вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов в постоянном однородном магнитном поле произвольной величины <sup>1</sup> и плазмы, состоящей из заряженных фермионов (см. [136]). Как видно из полученных результатов, выражения для амплитуд в общем случае, когда все фермионы находятся на произвольных уровнях Ландау, имеют достаточно громоздкий вид. Однако в некоторых предельных случаях эти формулы можно упростить.

### 1.3. Амплитуды для случая основного уровня Ландау,

$$\ell = \ell' = 0$$

В этом разделе рассматривается предел относительно сильного поля,  $B \gtrsim B_e$ , когда начальный и конечный фермионы находятся на основном уровне Ландау,  $\ell = \ell' = 0$ , тогда как виртуальный фермион может занимать произвольный уровень Ландау,  $n \geq 0$ . В этом случае  $s = s' = -1$ ,  $M_\ell = M_{\ell'} = m_f$ , и

$$\mathcal{I}_{n,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-x/2} x^{n/2}, \quad \mathcal{I}_{n-1,0}(x) = \sqrt{\frac{n}{x}} \mathcal{I}_{n,0}(x).\tag{1.31}$$

Вводя обозначение  $\mathcal{R}_{k'k}^{(1,2)--} \equiv (2m_f)^2 R_{k'k}^{(1,2)}$  мы получим следующие выражения для амплитуд (1.24) с вершинами скалярного, псевдоскалярного, векторного

---

<sup>1</sup> Строго говоря, индукция поля не должна превышать величину  $B_W = m_W^2/e \simeq 10^{24}$  Гс, соответствующую пределу применимости Стандартной модели.

или аксиального типов

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k}^{\bar{-}} = & -\exp[-i\theta] \exp\left[-\frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}{}^2}{4\beta}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \\ & \times \left\{ \exp\left[\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left(\frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{2\beta}\right)^n \frac{R_{k'k}^{(1)}}{P_{\parallel}^2 - m_f^2 - 2\beta n} + \right. \\ & \left. + \exp\left[-\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left(\frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{2\beta}\right)^n \frac{R_{kk'}^{(2)}}{P'_{\parallel}{}^2 - m_f^2 - 2\beta n} \right\}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где

$$R_{SS}^{(1)} = g_S g'_S j_S j'_S [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3]; \quad (1.33)$$

$$R_{SS}^{(2)} = R_{SS}^{(1)}(q \leftrightarrow -q'); \quad (1.34)$$

$$R_{PS}^{(1)} = -g_S g'_P j_S j'_P [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4]; \quad (1.35)$$

$$R_{SP}^{(2)} = g_S g'_P j_S j'_P [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4]; \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} R_{VS}^{(1)} = & g_S g'_V j_S \left\{ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1 j'_V) - \right. \\ & \left. - \frac{2\beta n}{q_{\perp}^2} [(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)]\mathcal{K}_3 \right\}; \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} R_{SV}^{(2)} = & g_S g'_V j_S \left\{ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1 j'_V) + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta n}{q_{\perp}^2} [(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)]\mathcal{K}_3 \right\}; \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} R_{AS}^{(1)} = & -g_S g'_A j_S \left\{ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j'_A) - \right. \\ & \left. - \frac{2\beta n}{q_{\perp}^2} [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)]\mathcal{K}_4 \right\}; \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} R_{SA}^{(2)} = & -g_S g'_A j_S \left\{ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2 j'_A) - \right. \\ & \left. - \frac{2\beta n}{q_{\perp}^2} [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)]\mathcal{K}_4 \right\}; \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$R_{PP}^{(1)} = -g_P g'_P j_P j'_P [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] ; \quad (1.41)$$

$$R_{PP}^{(2)} = R_{PP}^{(1)}(q \leftrightarrow -q') ; \quad (1.42)$$

$$R_{VP}^{(1)} = g_P g'_V j_P \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j'_V) - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)] \mathcal{K}_4 \right\} \quad (1.43)$$

$$R_{PV}^{(2)} = -g_P g'_V j_P \left\{ (P' \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_2 j'_V) - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)] \mathcal{K}_4 \right\} ; \quad (1.44)$$

$$R_{AP}^{(1)} = -g_P g'_A j_P \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (P \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] \mathcal{K}_3 \right\} ; \quad (1.45)$$

$$R_{PA}^{(2)} = g_P g'_A j_P \left\{ (P' \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) + \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)] \mathcal{K}_3 \right\} ; \quad (1.46)$$

$$R_{VV}^{(1)} = g_V g'_V \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_V) (\mathcal{K}_1 j_V) + (P \tilde{\Lambda} j_V) (\mathcal{K}_1 j'_V) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_V) (\mathcal{K}_1 P) + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_3 + (j_V \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_4] + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q_\perp'^2} [(j_V \Lambda j'_V) - i(j_V \varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] [(q \Lambda q') + i(q \varphi q')] - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_1 j_V) [(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)] - \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_1 j'_V) [(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)] \right\} ; \quad (1.47)$$

$$R_{VV}^{(2)} = R_{VV}^{(1)}(q \leftrightarrow -q') ; \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned}
R_{AV}^{(1)} = & -g_V g'_A \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 j_V) + (P \tilde{\Lambda} j_V) (\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 P) - \right. \\
& - m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] + \\
& + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q'^2} [(j_V \Lambda j'_A) - i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] [(q \Lambda q') + i(q \varphi q')] - \\
& \left. - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_2 j_V) [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] - \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_2 j'_A) [(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)] \right\}; \tag{1.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{VA}^{(2)} = & -g_V g'_A \left\{ (P' \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 j_V) + (P' \tilde{\Lambda} j_V) (\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 P') + \right. \\
& + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 - (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] + \\
& + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q'^2} [(j_V \Lambda j'_A) + i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] [(q \Lambda q') - i(q \varphi q')] + \\
& \left. + \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_2 j_V) [(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)] + \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_2 j'_A) [(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)] \right\}; \tag{1.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{AA}^{(1)} = & g_A g'_A \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_1 j_A) + (P \tilde{\Lambda} j_A) (\mathcal{K}_1 j'_A) - (j_A \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_1 P) - \right. \\
& - m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] + \\
& + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q'^2} [(j_A \Lambda j'_A) - i(j_A \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] [(q \Lambda q') + i(q \varphi q')] - \\
& \left. - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_1 j_A) [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] - \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_1 j'_A) [(q \Lambda j_A) + i(q \varphi j_A)] \right\}. \tag{1.51}
\end{aligned}$$

$$R_{AA}^{(2)} = R_{AA}^{(1)}(q \leftrightarrow -q'); \tag{1.52}$$

Заметим, что полученные результаты позволяют выделить также и предельный случай  $n = 0$ . В частности, амплитуда  $\mathcal{M}_{VV}^{-\bar{-}}$ , содержащая только векторные вершины, после замены  $g_V = e$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha(q)$ ,  $j'_\alpha = \varepsilon_\alpha(q')$ , где  $\varepsilon_\alpha(q)$  и  $\varepsilon_\alpha(q')$  – векторы поляризации начального и конечного фотонов соответственно, и использования закона сохранения энергии и  $z$  - компоненты импульса может быть приведена к виду (2.33) главы 2. Кроме того, результат для  $\mathcal{M}_{AV}^{-\bar{-}}$ ,

в случае, когда  $\ell' = \ell = n = 0$ , и с учетом замен  $m_f = m$ ,  $g_V = e$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha$ ,  $g'_V = G_F C_V / \sqrt{2}$ ,  $g'_A = G_F C_A / \sqrt{2}$ ,  $j'_\alpha = \bar{\nu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu$ , совпадет с амплитудой процесса  $e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , представленной в главе 4 (см. также [151]). В дополнение, легко заметить, что амплитуды, содержащие векторные вершины, имеют явный калибровочно-инвариантный вид.

#### 1.4. Амплитуды для случая рассеяния вперед

Для обобщения результатов, полученных в работе [75], на случай замагниченной плазмы в этом разделе мы рассмотрим процесс когерентного рассеяния обобщенного тока  $j$  на реальных фермионах среды без изменения их состояний (рассеяние «вперед»). При этом:  $\ell = \ell'$ ,  $s = s'$ ,  $q^\mu = q'^\mu$ ,  $p^\mu = p'^\mu$ ,  $\mathcal{K}_{1\alpha} = 2(p\tilde{\Lambda})_\alpha$ ,  $\mathcal{K}_{2\alpha} = 2(\tilde{\varphi}p)_\alpha$ ,  $\mathcal{K}_3 = 2M_\ell$ ,  $\mathcal{K}_4 = 0$ . Напомним, что под обобщенными токами  $j$  и  $j'$  в начальном и конечном состояниях понимается как одночастичные состояния (например, фотоны, аксионы), так и двухчастичные (например, нейтринные токи).

Поскольку данный процесс является когерентным, полная амплитуда рассеяния может быть получена суммированием по всем состояниям фермионов среды. В случае среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, были получены следующие результаты для обобщенных амплитуд:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k} = & -\frac{\beta}{2\pi^2} \sum_{\ell, n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{E_\ell} f_f(E_\ell) \times \\ & \times \left\{ \frac{\mathcal{D}_{k'k}^{(1)}}{(p+q)_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} + \frac{\mathcal{D}_{kk'}^{(2)}}{(p-q)_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} \right\}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где  $f_f(E_\ell) = [1 + \exp(E_\ell - \mu_f)/T]^{-1}$  – равновесная функция распределения фер-

мионов,  $T$  и  $\mu_f$  – температура и химический потенциал плазмы соответственно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{SS}^{(1)} &= gsg'_S j_S j'_S \left\{ [(q\tilde{\Lambda}p) + 2\beta\ell + 2m_f^2] \times \right. \\ &\times (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - 4\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right\}; \\ \mathcal{D}_{SS}^{(2)} &= \mathcal{D}_{SS}^{(1)}(q \rightarrow -q); \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\mathcal{D}_{SP}^{(1)} = \mathcal{D}_{PS}^{(2)} = -gsg'_P j_S j'_P (q\tilde{\varphi}p) [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2]; \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{VS}^{(1)} &= gsg'_V j_S m_f \left\{ [2(p\tilde{\Lambda}j'_V) + (q\tilde{\Lambda}j'_V)] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \right. \\ &- \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_V) + i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\ &+ [(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right\} \\ &- \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_V) + i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\ &+ [(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \left. \right\}; \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{SV}^{(2)} &= gsg'_V j_S m_f \left\{ [2(p\tilde{\Lambda}j'_V) - (q\tilde{\Lambda}j'_V)] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + \right. \\ &+ \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\ &+ [(q\Lambda j'_V) + i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right\} + \\ &+ \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\ &+ [(q\Lambda j'_V) + i(q\varphi j'_V)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \left. \right\}; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\mathcal{D}_{AS}^{(1)} = -g_S g'_A j_S m_f [2(p\tilde{\varphi}j'_A) + (q\tilde{\varphi}j'_A)] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2]; \quad (1.58)$$

$$\mathcal{D}_{SA}^{(2)} = \mathcal{D}_{AS}^{(1)}(q \rightarrow -q);$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{PP}^{(1)} = & -g_P g'_P j_P j'_P \left\{ [(q\tilde{\Lambda}p) + 2\beta\ell] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \right. \\ & \left. -4\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right\}; \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\mathcal{D}_{PP}^{(2)} = \mathcal{D}_{PP}^{(1)}(q \rightarrow -q);$$

$$\mathcal{D}_{VP}^{(1)} = \mathcal{D}_{PV}^{(2)} = g_P g'_V j_P m_f (q\tilde{\varphi}j'_V) [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2]; \quad (1.60)$$

$$\mathcal{D}_{AP}^{(1)} = -g_P g'_A j_P m_f \left\{ (q\tilde{\Lambda}j'_A) [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + \right. \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} & + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ [(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + [(q\Lambda j'_A) - \right. \\ & \left. - i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ [(q\Lambda j'_A) + \right. \\ & \left. + i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + [(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{PA}^{(2)} = -g_P g'_A j_P m_f \left\{ (q\tilde{\Lambda}j'_A) [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \right. \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} & - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ [(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - [(q\Lambda j'_A) + \right. \\ & \left. + i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ [(q\Lambda j'_A) - \right. \\ & \left. - i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + [(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{VV}^{(1)} = g_V g'_V & \left\{ \left[ (p\tilde{\Lambda}j_V)(P\tilde{\Lambda}j'_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(p\tilde{\Lambda}j'_V) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_V) \times \right. \right. & (1.63) \\
& \times [2\beta\ell + (p\tilde{\Lambda}q)] \left[ \mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2 \right] + 4\beta\sqrt{n\ell} (j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)[(q\Lambda j'_V) + i(q\varphi j'_V)] + (P\tilde{\Lambda}j'_V)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)[(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] + (P\tilde{\Lambda}j'_V) \times \right. \\
& \times [(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j_V)[(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] + \right. \\
& + (p\tilde{\Lambda}j'_V)[(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j_V) \times \right. \\
& \times [(q\Lambda j'_V) + i(q\varphi j'_V)] + (p\tilde{\Lambda}j'_V)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + [2\beta\ell + (p\tilde{\Lambda}q)] \left[ [(j_V\Lambda j'_V) + i(j_V\varphi j'_V)]\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + [(j_V\Lambda j'_V) - i(j_V\varphi j'_V)] \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \right] + \frac{4\beta\sqrt{n\ell}}{q_\perp^2} \left[ (q\Lambda j_V)(q\Lambda j'_V) - (q\varphi j_V)(q\varphi j'_V) \right] \mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{VV}^{(2)} = \mathcal{D}_{VV}^{(1)}(q \rightarrow -q, j_V \leftrightarrow j'_V);$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{AV}^{(1)} = & -g_V g'_A \left\{ \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)(j'_A\tilde{\varphi}p) + (P\tilde{\Lambda}j'_A)(j_V\tilde{\varphi}p) - \right. \right. & (1.64) \\
& \left. \left. - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(q\tilde{\varphi}p) - m_f^2(j_V\tilde{\varphi}j'_A) \right] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + \right. \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] + (P\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] + (P\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) + \right. \\
& \left. + i(q\varphi j_V)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] + (p\tilde{\varphi}j'_A) \times \right. \\
& \left. \times [(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] \right] \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] + \right. \\
& \left. + (p\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& \left. + (p\tilde{\varphi}q) \left[ [(j_V\Lambda j'_A) + i(j_V\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 - [(j_V\Lambda j'_A) - i(j_V\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{VA}^{(2)} = & -g_V g'_A \left\{ \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)(j'_A\tilde{\varphi}p) + (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(j_V\tilde{\varphi}p) + \right. \right. & (1.65) \\
& \left. \left. + (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(q\tilde{\varphi}p) - m_f^2(j_V\tilde{\varphi}j'_A) \right] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \right. \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] + (P'\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] + (P'\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) + \right. \\
& \left. + i(q\varphi j'_A)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] + (p\tilde{\varphi}j_V) \times \right. \\
& \left. \times [(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] \right] \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\varphi}j'_A)[(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p\tilde{\varphi}j_V)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - (p\tilde{\varphi}q)\left\{[(j_V\Lambda j'_A) - i(j_V\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 - [(j_V\Lambda j'_A) + i(j_V\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n-1,\ell}^2\right\}; \\
\mathcal{D}_{AA}^{(1)} = & g_A g'_A \left\{ \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A)(p\tilde{\Lambda}j'_A) + (p\tilde{\Lambda}j_A)(P\tilde{\Lambda}j'_A) - (j_A\tilde{\Lambda}j'_A) \times \right. \right. \quad (1.66) \\
& \times (M_\ell^2 + m_f^2 + (p\tilde{\Lambda}q)) \left. \right] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + 4\beta\sqrt{n\ell} (j_A\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A)[(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] + (P\tilde{\Lambda}j'_A)[(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)] \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] + (P\tilde{\Lambda}j'_A)[(q\Lambda j_A) + \right. \\
& \left. + i(q\varphi j_A)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j_A)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] + (p\tilde{\Lambda}j'_A) \times \right. \\
& \times [(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)] \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j_A)[(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] + \right. \\
& \left. + (p\tilde{\Lambda}j'_A)[(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + [M_\ell^2 + m_f^2 + (p\tilde{\Lambda}q)] \times \\
& \times \left[ [(j_A\Lambda j'_A) + i(j_A\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + [(j_A\Lambda j'_A) - i(j_A\varphi j'_A)]\mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \right] + \\
& \left. + \frac{4\beta\sqrt{n\ell}}{q_\perp^2} \left[ (q\Lambda j_A)(q\Lambda j'_A) - (q\varphi j_A)(q\varphi j'_A) \right] \mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \right\}; \\
\mathcal{D}_{AA}^{(2)} = & \mathcal{D}_{AA}^{(1)}(q \rightarrow -q, j_A \leftrightarrow j'_A).
\end{aligned}$$

Заметим, что выражения для амплитуд  $\mathcal{M}_{VS}$ ,  $\mathcal{M}_{SV}$ ,  $\mathcal{M}_{VP}$ ,  $\mathcal{M}_{PV}$ ,  $\mathcal{M}_{VV}$ ,  $\mathcal{M}_{AV}$  и  $\mathcal{M}_{VA}$  обладают калибровочной инвариантностью. Для доказательства этого факта достаточно в соответствующих амплитудах сделать замену  $j_{V\alpha} = q_\alpha$ ,  $j'_{V\alpha} = q'_\alpha$  и воспользоваться рекуррентными соотношениями для полиномов Лагерра [150].

Амплитуды для фермионов с положительным зарядом ( $e_f > 0$ ) можно

получить из (1.53) – (1.66) если учесть, что слагаемые, четные по  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$ , будут входить в соответствующие амплитуды в виде четных по  $\mu_f$  функций, а нечетные – в виде нечетных по  $\mu_f$  функций. Это утверждение согласуется с обобщением теоремы Фарри на случай замагниченной среды, рассмотренным в работе [26] (см. также приложение Г).

## 1.5. Обсуждение

В данной главе были рассмотрены древесные двухвершинные амплитуды для переходов  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле произвольной величины, не превышающей предела применимости Стандартной модели,  $B_W = m_W^2/e \simeq 10^{24}$ , и плазмы, состоящей из заряженных фермионов, для всевозможных комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов. Показано, что все полученные амплитуды имеют явный лоренц-инвариантный вид относительно преобразований вдоль магнитного поля, вследствие выбора решений уравнения Дирака как собственных функций ковариантного оператора  $\mu_z$ . В этом случае парциальные вклады в амплитуду от каналов с различными значениями поляризационных состояний фермионов вычисляются путём непосредственного перемножения биспиноров и матриц Дирака. Такой подход представляет собой альтернативу методу [53, 54], согласно которому модули амплитуд возводятся в квадрат и суммируются по поляризационным состояниям с использованием матриц плотности для фермионов. Следует отметить, что, исходя из полученных результатов, относительно просто можно воспроизвести предельные случаи как слабого, так и сверхсильного полей.

Набор амплитуд для переходов  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и плазме, состоящей из заряженных фермионов, может быть использован для анализа различных квантовых процессов во внешней активной среде. Используя результаты для амплитуд  $\mathcal{M}_{VV}$  и  $\mathcal{M}_{VA}$ , можно описать про-

цесс радиационного перехода нейтрино  $\nu \rightarrow \nu\gamma$ . Путём замен  $g_a = C_f/(2f_a)$ ,  $j_\alpha = -iq_\alpha$ ,  $g'_V = G_F C_V/\sqrt{2}$ ,  $g'_A = G_F C_A/\sqrt{2}$ ,  $j'_\alpha = \bar{\nu}\gamma_\alpha(1 + \gamma_5)\nu$  в  $\mathcal{M}_{AV}$ ,  $\mathcal{M}_{AA}$  и  $g_V = e$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha$ ,  $g'_a = C_f/(2f_a)$ ,  $j'_\alpha = iq'_\alpha$  в  $\mathcal{M}_{VA}$  можно также получить амплитуды процессов распада аксиона  $a \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и осцилляций фотон-аксион в присутствии плазмы соответственно.

Более того, полученные результаты могут быть использованы для анализа реакций с возможным резонансом на виртуальном электроне (см., например, [152]). Как хорошо известно [16], процессы такого типа играют важнейшую роль в магнитосферах изолированных нейтронных звёзд, обеспечивая рождение электрон-позитронной плазмы. Указанные процессы рассматриваются в главе 5 настоящей диссертации.

Наконец, несмотря на определенную громоздкость полученных результатов, полученные выражения для амплитуд удобно использовать для численных расчетов.

## Глава 2

Комптовское рассеяние в замагниченной  
плазме

## 2.1. Введение

В настоящей главе рассматривается процесс рассеяния фотона,  $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$ , в присутствии сильного магнитного поля и электрон-позитронной плазмы, когда величина магнитного поля  $B$  является максимальным физическим параметром, а именно  $\sqrt{\beta} \gg T, \mu, \omega, E$ . Напомним, что  $T$  – температура плазмы,  $\mu$  – ее химический потенциал,  $\omega$  и  $E$  – энергии начальных фотона и электрона (позитрона). В таком пределе практически все электроны и позитроны плазмы будут находиться на основном уровне Ландау. В данной главе будет рассмотрен нерезонансный случай, когда импульсы начальных фотона и электрона (позитрона) удовлетворяют условию  $\beta \gg (pq)_\parallel + q_\parallel^2/2$ . Такая ситуация может реализовываться в модели источника мягких повторяющихся гамма всплесков (SGR) [10–13] при образовании магнитно захваченного горячего (с температурой  $\sim 1$  МэВ) плазменного образования на поверхности магнитара (так называемый «fireball») или во внешней части коры магнитара в не очень плотной ( $\rho \lesssim 10^7$  г/см<sup>3</sup>) вырожденной плазме [17].

Ранее реакция комптовского рассеяния в замагниченной среде изучалась в большом количестве работ. Случай магнитного поля без плазмы был исследован в [47–50]. Было найдено, что сечение процесса  $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$  становится сильно анизотропным и существенно зависит от поляризаций фотонов. В недавней работе [153] было показано, что дисперсионные свойства фотона в сильно замагниченной холодной плазме значительно влияют на рассматриваемый процесс.

План изложения главы 2 следующий. В разделе 2.2 мы рассматриваем

распространение электромагнитного излучения в замагниченной среде. В разделе 2.3 приводятся выражения для парциальных амплитуд комптоновского рассеяния для различных поляризационных конфигураций начального и конечного фотонов. Аналитические и численные расчеты коэффициентов поглощения фотона для обеих ситуаций зарядово симметричной и холодной плазмы рассматриваются в разделе 2.4. Глава основана на результатах работ [130, 154–158].

## 2.2. Распространение фотона в замагниченной среде

Распространение электромагнитного излучения в любой активной среде удобно описывать в терминах нормальных (собственных) мод. В свою очередь, поляризационные и дисперсионные свойства нормальных мод связаны с собственными векторами и собственными значениями поляризационного оператора фотона  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  соответственно. Для дальнейшего анализа этих свойств удобно разложить тензор  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  по базису из 4-векторов [55], построенных из обезразмеренного тензора электромагнитного поля и 4-вектора импульса фотона  $q_\alpha$ :

$$\begin{aligned} b_\mu^{(1)} &= (\varphi q)_\mu, & b_\mu^{(2)} &= (\tilde{\varphi} q)_\mu, \\ b_\mu^{(3)} &= q^2 (\Lambda q)_\mu - q_\mu q_\perp^2, & b_\mu^{(4)} &= q_\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

являющихся собственными векторами поляризационного оператора в постоянном однородном магнитном поле. При этом  $(b^{(1)}b^{*(1)}) = -q_\perp^2$ ,  $(b^{(2)}b^{*(2)}) = -q_\parallel^2$ ,  $(b^{(3)}b^{*(3)}) = -q^2 q_\parallel^2 q_\perp^2$ ,  $(b^{(4)}b^{*(4)}) = q^2$ .

В этом базисе будем иметь следующее разложение  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  по собственным векторам  $r_\alpha^{(\lambda)}$  в замагниченной плазме с соответствующими собственными значениями  $\varkappa^{(\lambda)}$  [59, 159–161]:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^3 \varkappa^{(\lambda)} \frac{r_\alpha^{(\lambda)} (r_\beta^{(\lambda)})^*}{(r^{(\lambda)})^2}, \quad r_\beta^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 A_i^{(\lambda)} b_\beta^{(i)}, \quad (2.2)$$

где  $A_i^{(\lambda)}$  некоторые комплексные коэффициенты.

Как уже отмечалось ранее (см. Введение к настоящей диссертации), при исследовании квантовых явлений в сильно замагниченной плазме, движущейся как целое вдоль магнитного поля со скоростью  $u_\alpha$ , можно рассмотреть ситуацию только магнитного поля без электрической составляющей. В этом случае равновесная функция распределения электронов и позитронов плазмы, имеющая температуру  $T$  и химический потенциал  $\mu$  может быть записана в явном лоренц-инвариантном виде:

$$f_{\pm}(p) = \frac{1}{1 + \exp [((pu)_{\parallel} \pm \mu)/T]}, \quad (2.3)$$

$$(pu)_{\parallel} = Eu_0 - p_z u_z, \quad E = \sqrt{p_z^2 + m^2}.$$

Здесь верхний знак соответствует электронной, а нижний – позитронной компонентам плазмы.

С учетом этого замечания, в случае сильно замагниченной плазмы, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи,  $\beta \gg m^2, \mu^2, T^2$ , используя результаты работ [59, 159, 160, 162] для  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ , можно получить следующее разложение по обратным степеням магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\alpha\beta} = & \sum_{\lambda} \varkappa^{(\lambda)} \frac{r_{\alpha}^{(\lambda)} (r_{\beta}^{(\lambda)})^*}{(r^{(\lambda)})^2} \simeq -\frac{2\alpha}{\pi} \beta \mathcal{D} \frac{(\tilde{\varphi}q)_{\alpha} (\tilde{\varphi}q)_{\beta}}{q_{\parallel}^2} + \\ & + \frac{\alpha}{3\pi} (\varphi q)_{\alpha} (\varphi q)_{\beta} + \frac{i\alpha}{\pi} \Delta N [\varphi_{\alpha\beta} (qu) + (q\varphi)_{\alpha} u_{\beta} - (q\varphi)_{\beta} u_{\alpha}] + \\ & + \frac{\alpha}{3\pi} \mathcal{V} (q^2 g_{\alpha\beta} - q_{\alpha} q_{\beta}) + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\mathcal{D} = -\mathcal{J}_1(q_{\parallel}) - H\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}\right), \quad (2.5)$$

$$\mathcal{J}_1(q_{\parallel}) = 2q_{\parallel}^2 m^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E} \frac{f_{-}(p) + f_{+}(p)}{q_{\parallel}^4 - 4(pq_{\parallel})^2}, \quad (2.6)$$

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (2.7)$$

$$H(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} - 1 + \quad (2.8)$$

$$+ \frac{i\pi}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1,$$

$$\Delta N = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E} (pu)_{\parallel} [f_-(p) - f_+(p)] = \frac{(2\pi)^2}{\beta} (n_{e^-} - n_{e^+}), \quad (2.9)$$

$n_{e^-}$  ( $n_{e^+}$ ) – концентрация электронов (позитронов) плазмы,

$$\mathcal{V} = \ln(B/B_e) - 1.792 + \frac{3}{2} \int_0^1 dx (1-x^2) \ln \left[ 1 - \frac{q^2}{4m^2} (1-x^2) \right]. \quad (2.10)$$

Далее будет рассматриваться только система покоя плазмы, так, что  $(pu)_{\parallel} = E$ . При этом в разложении собственных векторов  $r_{\alpha}^{(\lambda)}$  по обратным степеням поля для получения самосогласованных результатов оказывается необходимым учесть следующий порядок малости по  $1/\beta$ . С учетом этих замечаний получим:

$$r_{\alpha}^{(1,3)} = \left[ \mp \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q^2}{q_{\parallel}^2} - q_{\perp}^2} \right] b_{\alpha}^{(1)} - i \frac{6\Delta N \omega}{q_{\parallel}^2} b_{\alpha}^{(3)} + \quad (2.11)$$

$$+ i \frac{\Delta N k_z q_{\perp}^2}{2\beta \mathcal{D} q_{\parallel}^2} \left[ \pm \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q^2}{q_{\parallel}^2} + q_{\perp}^2} \right] b_{\alpha}^{(2)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right),$$

$$r_{\alpha}^{(2)} = b_{\alpha}^{(2)} - i \frac{\Delta N k_z}{2\beta \mathcal{D}} b_{\alpha}^{(1)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \quad (2.12)$$

Коэффициенты  $A_i^{(\lambda)}$  в разложении (2.2) с точностью до членов  $O(1/\beta^2)$

ИМЕЮТ ВИД:

$$A_1^{(1,3)} = \mp \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q^2}{q_{\parallel}^2} - q_{\perp}^2}, \quad (2.13)$$

$$A_2^{(1,3)} = i \frac{\Delta N k_z q_{\perp}^2}{2\beta \mathcal{D} q_{\parallel}^2} \left[ \pm \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q^2}{q_{\parallel}^2} + q_{\perp}^2} \right],$$

$$A_3^{(1,3)} = -i \frac{6\Delta N \omega}{q_{\parallel}^2}, \quad A_1^{(2)} = -i \frac{\Delta N k_z}{2\beta \mathcal{D}},$$

$$A_2^{(2)} = 1, \quad A_3^{(2)} = 0.$$

Соответствующие собственные значения в приближениях  $O(1/\beta^2)$  для  $\varkappa^{(1,3)}$  и  $O(1/\beta)$  для  $\varkappa^{(2)}$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \varkappa^{(1,3)} &= \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} + \frac{\alpha}{6\pi} \left[ \mp \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q^2}{q_{\parallel}^2} - q_{\perp}^2} \right] \times \\ &\times \left\{ 1 \mp \frac{3(\Delta N k_z)^2 q_{\perp}^2}{2\beta \mathcal{D} q_{\parallel}^2} \left[ q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q^2}{q_{\parallel}^2} \right]^{-1/2} \right\} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\varkappa^{(2)} = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} + \frac{2\alpha}{\pi} \beta \mathcal{D} + O\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (2.15)$$

Как видно из полученного результата, даже в приближении сильно замагниченной плазмы определение дисперсионных свойств фотонов для всех трех поляризаций представляет собой достаточно сложную задачу. Однако в предельных случаях зарядово симметричной и холодной, вырожденной, нерелятивистской плазмы формулы (2.13) – (2.15) значительно упрощаются. Рассмотрим эти случаи более подробно.

### 2.2.1. Зарядово симметричная плазма, $\mu = 0$

В случае зарядово симметричной плазмы  $\Delta N = 0$ , коэффициенты (2.13) упрощаются:  $A_1^{(1)} = -2q_{\perp}^2$ ,  $A_2^{(2)} = 1$  (остальные коэффициенты равны нулю). Тогда, собственные векторы (2.11) – (2.12) и собственные значения (2.14) – (2.15)

примут вид:

$$r_{\alpha}^{(1)} = -2q_{\perp}^2 b_{\alpha}^{(1)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad r_{\alpha}^{(3)} = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (2.16)$$

$$r_{\alpha}^{(2)} = b_{\alpha}^{(2)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \quad (2.17)$$

$$\varkappa^{(1)} = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} - \frac{\alpha}{3\pi} q_{\perp}^2 + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (2.18)$$

$$\varkappa^{(3)} = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (2.19)$$

а собственное значение  $\varkappa^{(2)}$  определяется формулой (2.15).

Нетрудно видеть, что полученные собственные векторы и собственные значения поляризационного оператора в зарядово симметричной плазме имеют тот же вид, что и в замагниченном вакууме<sup>1</sup>. Поэтому для фотонов, находящихся в равновесии с плазмой, можно ввести два поляризационных состояния, определяемые векторами поляризации

$$\varepsilon_{\alpha}^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_{\alpha}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\alpha}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}. \quad (2.20)$$

Здесь символы 1 и 2 соответствуют  $\parallel$  и  $\perp$  поляризациям в чистом магнитном поле [163],  $X$  - и  $O$  - модам работы [52], и  $E$  - и  $O$  - модам в замагниченной плазме [12]. При этом вектор поляризации, соответствующий собственному значению  $\varkappa^{(3)}$ , может быть устранен калибровочным преобразованием и поэтому не будет определять физическую моду фотона. Кроме того, в приближении  $O(1/\beta)$  закон дисперсии фотона моды 1 практически не отличается от вакуумного,  $q^2 \simeq 0$ . С другой стороны, дисперсионные свойства фотона моды 2 претерпевают существенные изменения даже по сравнению с замагниченным вакуумом и, следовательно, будут оказывать дополнительное влияние на кинематику процессов с участием фотонов этой моды. Рассмотрим данное утверждение более подробно.

---

<sup>1</sup> Под термином «замагниченный вакуум» понимается магнитное поле без плазмы.

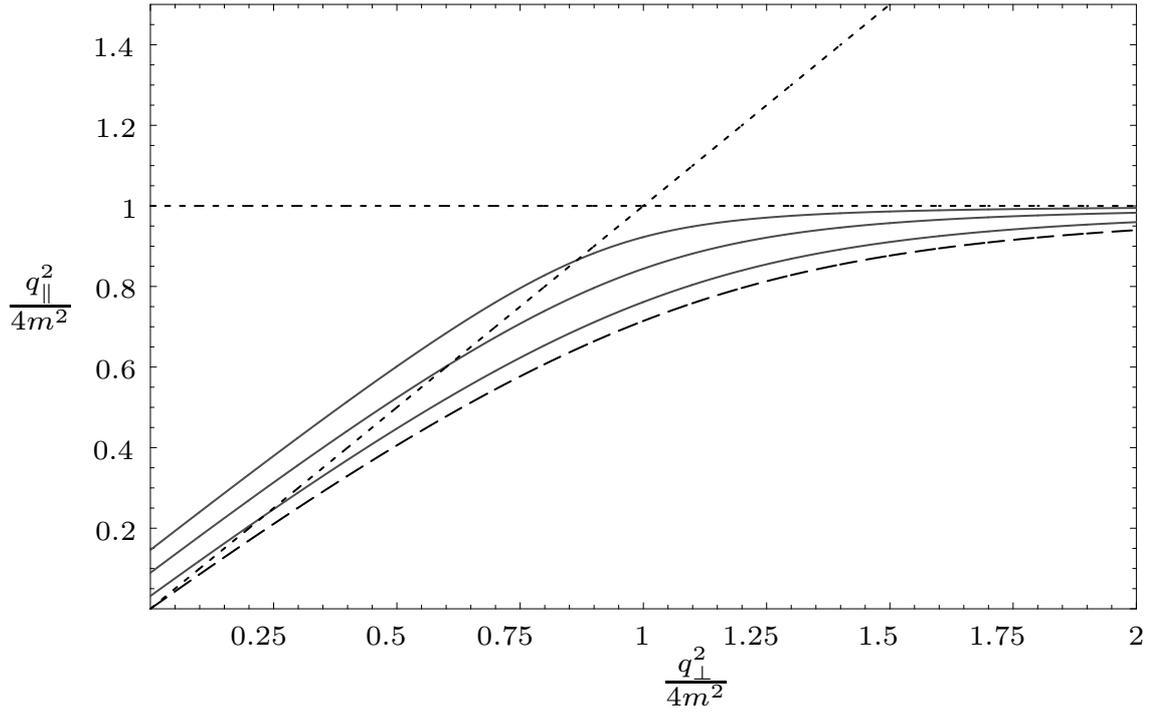


Рис. 2.1. Законы дисперсии фотона моды 2 в сильном магнитном поле  $B/B_e = 200$  и нейтральной плазме для различных значений температуры:  $T = 1$  МэВ (верхняя кривая),  $T = 0.5$  МэВ (средняя кривая),  $T = 0.25$  МэВ (нижняя кривая). Дисперсия фотона без плазмы обозначена штриховой линией. Диагональная штриховая линия соответствует вакуумному закону дисперсии,  $q^2 = 0$ . Угол ( $\theta$ ) между импульсом фотона и направлением магнитного поля равен  $\pi/2$ .

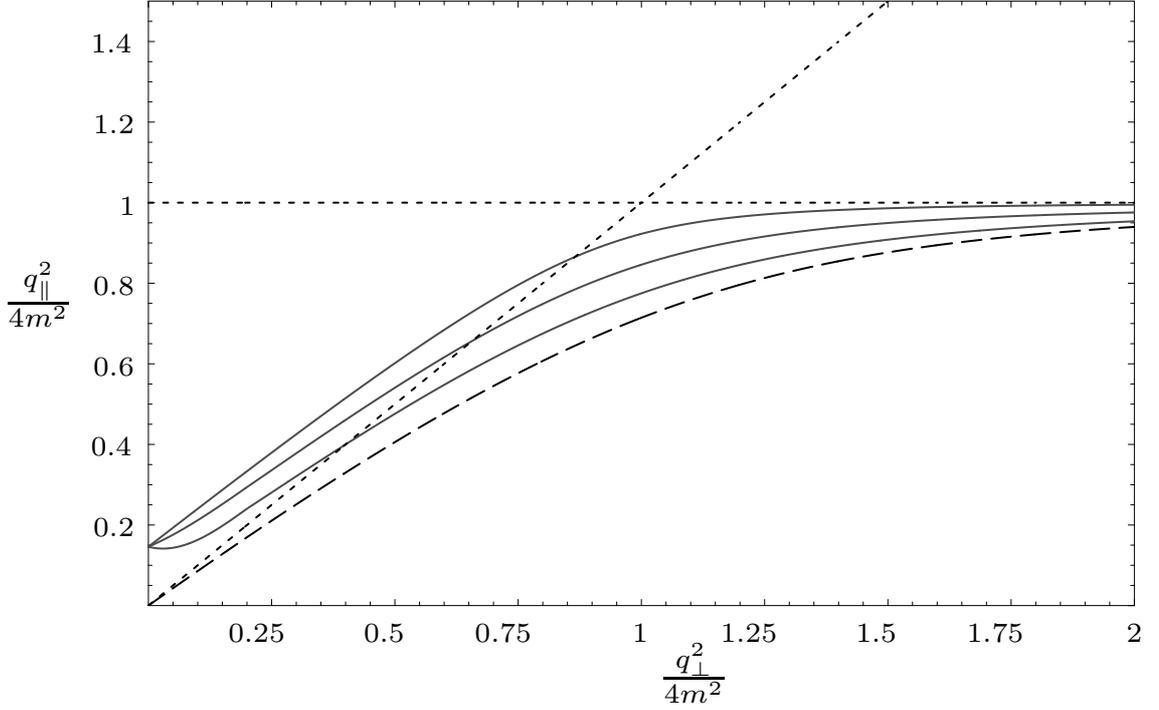


Рис. 2.2. Законы дисперсии фотона моды 2 в сильном магнитном поле  $B/B_e = 200$  и нейтральной плазме ( $T = 1\text{МэВ}$ ) для различных значений угла между импульсом фотона и направлением магнитного поля  $\theta = \pi/2$  (верхняя кривая),  $\theta = \pi/6$  (средняя кривая),  $\theta = \pi/12$  (нижняя кривая). Дисперсия фотона без плазмы обозначена штриховой линией. Диагональная штриховая линия соответствует вакуумному закону дисперсии,  $q^2 = 0$ .

На рис. 2.1 и 2.2, представлены законы дисперсии фотона моды 2 как решения уравнения

$$q^2 - \varkappa^{(2)} = 0 \quad (2.21)$$

в замагниченной плазме для различных значений температур, углов и импульса фотона. Как нетрудно видеть, в противоположность чистому магнитному полю, в плазме существует область с  $q^2 > 0$  ниже первого циклотронного резонанса, определяемого условием  $q_{\parallel}^2 = 0$ . Этот факт связан с появлением плазменной частоты в представлении реальных электронов и позитронов среды, которая может быть определена из уравнения

$$\omega_p^2 - \varkappa^{(2)}(\omega_p, \mathbf{k} \rightarrow 0) = 0. \quad (2.22)$$

В результате может существенно измениться кинематика различных фо-

тонных процессов. Например, в этой области становится возможным новый канал  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , запрещенный в магнитном поле в отсутствие плазмы. В то же время каналы расщепления  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ , разрешенные в магнитном поле, в этой области кинематически закрыты [164] (см. главу 3). Кроме того, наличие плазменной частоты приводит к возникновению порога для каналов рассеяния фотона моды 2 на электронах и позитронах плазмы,  $\gamma_2e \rightarrow \gamma_1e$ ,  $\gamma_2e \rightarrow \gamma_2e$ , который отсутствует в чистом магнитном поле.

### 2.2.2. Зарядово несимметричная холодная плазма, $T \ll \mu - m$

Как нетрудно видеть из формул для собственных векторов (2.11) и (2.12), в случае  $\mu \neq 0$  даже в пределе сильного поля фотоны будут иметь эллиптические поляризации. Однако в пределе сильного поля из вида собственных векторов (2.11), (2.12) и собственных значений поляризационного оператора фотона (2.14), (2.15) следует, что фотон моды 2 остается линейно поляризованным, так же, как и в случае зарядово симметричной плазмы (см. формулу (2.17)). С другой стороны, фотоны мод 1 и 3 формально остаются эллиптически поляризованными. Но, учитывая, что вектор  $b_\alpha^{(3)}$  может быть представлен в виде  $b_\alpha^{(3)} = q^2(\Lambda q)_\alpha$  (слагаемое, пропорциональное  $q_\alpha$  исчезает в силу калибровочной инвариантности), а также уравнение дисперсии для фотонов этих мод

$$q^2 - \varkappa^{(1,3)} = 0, \quad (2.23)$$

нетрудно получить условие, при котором векторы поляризации фотонов мод 1 и 3 будут определяться формулами (2.16):

$$\frac{\alpha\Delta N}{2\pi m \sin \theta} = \frac{\alpha p_F}{\pi m \sin \theta} \ll 1. \quad (2.24)$$

В частности, этому условию заведомо удовлетворяет ситуация холодной, почти вырожденной, умеренно релятивистской плазмы. С точки зрения возможных астрофизических приложений такой случай является наиболее реалистичным, реализуемым, например, в приповерхностном слое нейтронной звезды, где

процесс  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  может играть важную роль в формировании наблюдаемых спектров [129, 165–167].

С другой стороны, при исследовании процессов нейтринного остывания нейтронной звезды (см. главу 4), в случае  $\beta \gg m^2$ , когда электроны занимают основной уровень Ландау, анализ амплитуд (1.32), (1.47) – (1.50) (см., также [151, 161]), показывает, что только фотоны с поляризацией, соответствующей вектору  $r_\alpha^{(2)} \simeq b_\alpha^{(2)}$  будут определять лидирующие по внешнему полю вклады в амплитуды процессов с участием фотонов и нейтрино. Таким образом, при исследовании процессов  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ ,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  мы можем также ограничиться векторами поляризации (2.20).

В рассматриваемом случае в приближении  $O(1/\beta)$  интеграл  $\mathcal{J}(q_\parallel)$  в собственном значении поляризационного оператора фотона  $\varkappa^{(2)}$  (формула (2.6)) может быть вычислен аналитически и представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(q_\parallel) = & -\frac{1}{2\sqrt{z(1-z)}} \left( \operatorname{arctg} \left[ \frac{v_F - v_\phi + zv_F(v_\phi^2 - 1)}{(v_\phi^2 - 1)\sqrt{z(1-z)}} \right] + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left[ \frac{v_F + v_\phi + zv_F(v_\phi^2 - 1)}{(v_\phi^2 - 1)\sqrt{z(1-z)}} \right] \right), \quad 0 \leq z \leq 1, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(q_\parallel) = & -\frac{1}{4\sqrt{z(z-1)}} \times \\ & \times \left( \ln \left[ \frac{v_F - v_\phi + (v_\phi^2 - 1)(zv_F - \sqrt{z(z-1)})}{v_F - v_\phi + (v_\phi^2 - 1)(zv_F + \sqrt{z(z-1)})} \right] + \right. \\ & \left. + \ln \left[ \frac{v_F + v_\phi + (v_\phi^2 - 1)(zv_F - \sqrt{z(z-1)})}{v_F + v_\phi + (v_\phi^2 - 1)(zv_F + \sqrt{z(z-1)})} \right] \right) - \\ & - \frac{i\pi\theta(v_F|v_\phi| - 1)}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1, \\ z = & \frac{q_\parallel^2}{4m^2}, \quad v_\phi = \frac{\omega}{q_z}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

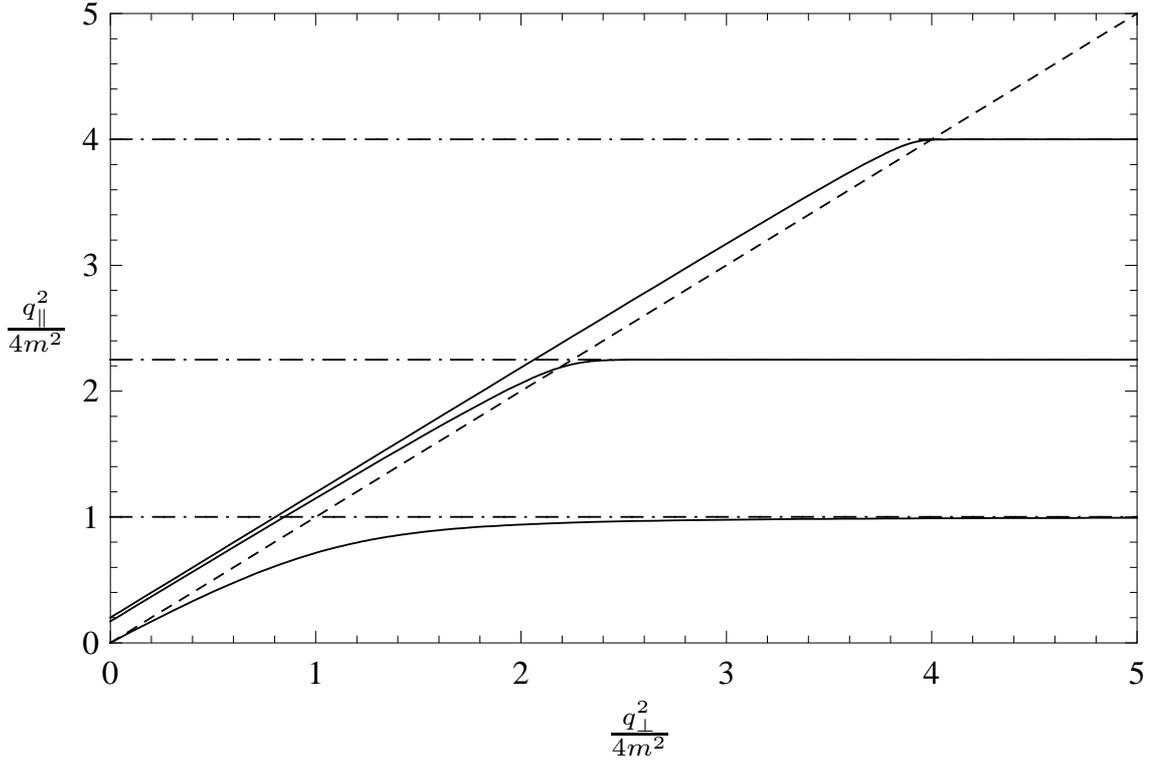


Рис. 2.3. Закон дисперсии фотона моды 2, распространяющегося поперек магнитного поля при  $B/B_e = 200$  в вырожденной ( $T = 0$ ) плазме при следующих значениях химического потенциала:  $\mu = 1$  МэВ (верхняя кривая),  $\mu = 0.75$  МэВ (средняя кривая),  $\mu = 0.5$  МэВ (нижняя кривая). Диагональная штриховая линия соответствует вакуумному закону дисперсии,  $q^2 = 0$ .

На рис. 2.3 и 2.4 представлены законы дисперсии фотона в замагниченной холодной плазме для различных значений химического потенциала, углов и импульса фотона. Из представленных рисунков видно, что в вырожденной плазме, по сравнению с чистым магнитным полем, порог рождения  $e^+e^-$  пары смещается со значения  $q_{\parallel}^2 = 4m^2$  до величины

$$q_{\parallel}^2 = 2 \left( \mu^2 - p_F |q_z| + \mu \sqrt{(p_F - |q_z|)^2 + m^2} \right). \quad (2.27)$$

Это следует из того факта, что в области  $v_F |v_{\phi}| > 1$  (или  $|q_z| < 2p_F$ ) мнимые части в (2.8) и (2.26) взаимно сокращаются, корневая сингулярность вблизи  $q_{\parallel}^2 = 4m^2$  исчезает, и в мнимую часть  $\varkappa^{(2)}$  будет давать вклад только логарифмическая функция в (2.26).

Данный вывод полностью согласуется с кинематическим анализом процес-

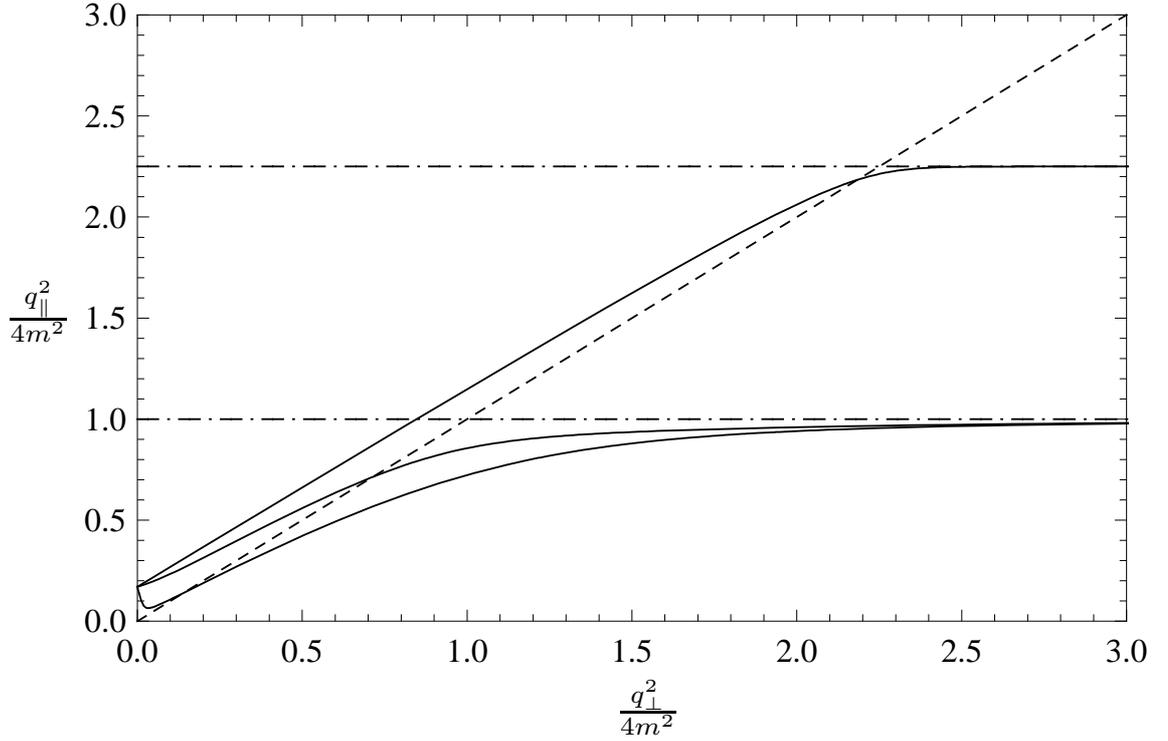


Рис. 2.4. Закон дисперсии фотона моды 2 в вырожденной ( $T = 0$ ) плазме в зависимости от угла  $\theta$  между импульсом фотона и направлением магнитного поля при  $B/B_e = 200$ ,  $\mu = 0.75$  МэВ для  $\theta = \pi/2$  (верхняя кривая),  $\theta = \pi/4$  (средняя кривая),  $\theta = \pi/12$  (нижняя кривая). Диагональная штриховая линия соответствует вакуумному закону дисперсии,  $q^2 = 0$ .

са  $\gamma_2 \rightarrow e^+e^-$  в холодной плазме. Действительно, используя законы сохранения энергии и импульса вместе с очевидными условиями  $E \geq \mu$  и  $|p_z| \geq p_F$  для электрона мы вновь приходим к результату (2.27).

Для значений энергий фотона  $\omega \sim T \ll \mu - m$  собственное значение  $\varkappa^{(2)}$  принимает особенно простой вид:

$$\varkappa^{(2)} \simeq \frac{\omega_p^2 q_{\parallel}^2}{\omega^2 - v_F^2 k_z^2}, \quad (2.28)$$

где  $\omega_p^2 = (2\alpha\beta/\pi)v_F$  – плазменная частота. Здесь мы пренебрегли первым слагаемым в (2.15), поскольку оно не влияет на закон дисперсии в первом порядке по константе  $\alpha$ . Следует отметить, что в зарядово несимметричной плазме, так же, как и в симметричной, у фотона с вектором поляризации  $r_{\alpha}^{(2)}$  появляется эффективная масса, так как  $\varkappa^{(2)} \simeq \omega_p^2$  при  $\mathbf{k} = 0$ . С другой стороны,  $\varkappa^{(1,3)} = 0$  при

$\mathbf{k} = 0$ , т.е. фотоны мод 1 и 3 остаются безмассовыми. В рассматриваемом приближении решение уравнения дисперсии (2.21) для фотона моды 2, распространяющегося под ненулевым углом  $\theta$  по отношению к магнитному полю, можно найти аналитически, как функцию  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ , представимую в виде

$$\omega = \left\{ \frac{1}{2} [k^2(1 + v_F^2 \cos^2 \theta) + \omega_p^2] + \frac{1}{2} \sqrt{[k^2(1 - v_F^2 \cos^2 \theta) + \omega_p^2]^2 - 4\omega_p^2(1 - v_F^2)k^2 \cos^2 \theta} \right\}^{1/2}, \quad (2.29)$$

В частности, в случае нерелятивистской плазмы,  $v_F \ll 1$ , получаем

$$\omega \simeq \left\{ \frac{1}{2} [k^2 + \omega_p^2] + \frac{1}{2} \sqrt{[k^2 + \omega_p^2]^2 - 4\omega_p^2 k^2 \cos^2 \theta} \right\}^{1/2}. \quad (2.30)$$

В случае релятивистской плазмы,  $v_F \sim 1$ , имеем

$$\omega \simeq \sqrt{k^2 + \omega_p^2}. \quad (2.31)$$

В заключение этого раздела отметим следующее. Из формул (2.7) и (2.6) следует, что собственное значение поляризационного оператора  $\varkappa^{(2)}$  становится большим вблизи порога рождения электрон-позитронной пары (см. рис. 2.1 – 2.4), что указывает на необходимость учета перенормировки волновой функции фотона этой поляризации:

$$\varepsilon_\alpha^{(2)}(q) \rightarrow \varepsilon_\alpha^{(2)}(q) \sqrt{Z_2}, \quad Z_2^{-1} = 1 - \frac{\partial \varkappa^{(2)}(q)}{\partial \omega^2}. \quad (2.32)$$

Однако в холодной почти вырожденной плазме при выполнении условия  $\omega \ll \mu - m$  эта перенормировка становится несущественной, поскольку основной вклад в физически наблюдаемые характеристики (например, светимость) дает область энергий фотонов  $\omega \ll m$ .

### 2.3. Амплитуда процесса $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$

Процесс  $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$  в магнитном поле описывается двумя диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 2.5, а его амплитуду в сильно замагниченной

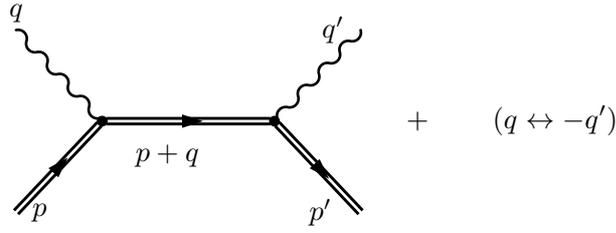


Рис. 2.5. Диаграммы Фейнмана для процесса комптоновского рассеяния фотона на электро-  
троне в сильном магнитном поле. Двойные линии означают, что влияние магнитного поля  
на начальное и конечное состояния электрона и на электронный пропагатор учтено точно.

плазме можно получить из формул (1.32), (1.47) и (1.48) главы 1 следующей  
заменой  $g_V = g'_V = e$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha(q)$ ,  $j'_\alpha = \varepsilon_\alpha^*(q')$  и, с учетом закона сохранения  
продольных компонент вектора энергии-импульса, представить в следующем,  
удобном для дальнейших вычислений, виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'} &= -4\pi\alpha \exp\left[-\frac{q_\perp^2 + q'^2 - 2i(q\varphi q')}{4\beta}\right] \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_\alpha^{*(\lambda')}(q') \varepsilon_\beta^{(\lambda)}(q) T_{\alpha\beta}^n}{q_\parallel^2 + 2(pq)_\parallel - 2\beta n} + (q \leftrightarrow -q'), \end{aligned} \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^n &= \frac{2m}{\sqrt{-Q_\parallel^2}} \left\{ S_n [-(q\tilde{\Lambda})_\alpha (Q\tilde{\varphi})_\beta - (q'\tilde{\Lambda})_\beta (Q\tilde{\varphi})_\alpha + \right. \\ &+ (q\tilde{\varphi}q')\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} + \varkappa(Q\tilde{\varphi})_\alpha (Q\tilde{\varphi})_\beta] - \\ &- S_{n-1} [(q\tilde{\varphi}q')(\Lambda_{\alpha\beta} + i\varphi_{\alpha\beta}) - (q\Lambda)_\alpha (Q\tilde{\varphi})_\beta - \\ &\left. - (q'\Lambda)_\beta (Q\tilde{\varphi})_\alpha - i(Q\tilde{\varphi})_\alpha (q'\varphi)_\beta + i(Q\tilde{\varphi})_\beta (q\varphi)_\alpha] \right\}, \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{2\beta} \right)^n. \quad (2.34)$$

Подставляя в выражение (2.33) векторы поляризации (2.20), получим парци-  
альные амплитуды для различных поляризационных состояний начального и  
конечного фотонов для обоих случаев зарядово симметричной и зарядово несим-  
метричной плазмы. Эти амплитуды можно представить в ковариантном виде:

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 1} = -\frac{8i\pi\alpha t}{\beta} \frac{(q\varphi q')(q\tilde{\varphi}q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}{}^2 (-Q_{\parallel}^2)}}, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{8i\pi\alpha t}{\beta} \frac{(q\Lambda q')(q'\tilde{\Lambda}Q)}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\parallel}{}^2 (-Q_{\parallel}^2)}}, \quad (2.36)$$

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 1} = \frac{8i\pi\alpha t}{\beta} \frac{(q\Lambda q')(q\tilde{\Lambda}Q)}{\sqrt{q'_{\parallel}{}^2 q_{\perp}{}^2 (-Q_{\parallel}^2)}}, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2 \rightarrow 2} = & 16\pi\alpha t \frac{\sqrt{q'_{\parallel}{}^2 q_{\parallel}{}^2} \sqrt{(-Q_{\parallel}^2)} \varkappa}{(q\tilde{\Lambda}q')^2 - \varkappa^2 (q\tilde{\varphi}q')^2} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}{}^2}{4\beta} + i \frac{(q\varphi q')(q\tilde{\varphi}q')}{2\beta \varkappa q_{\parallel}^2 q'_{\parallel}{}^2 Q_{\parallel}^2} \left[ 4m^2 (q\tilde{\Lambda}q') + (q\tilde{\Lambda}q')^2 - \varkappa^2 (q\tilde{\varphi}q')^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где  $\varkappa = \sqrt{1 - 4m^2/Q_{\parallel}^2}$  и  $Q_{\parallel}^2 = (q - q')_{\parallel}^2 < 0$ ,  $q_{\alpha} = (\omega, \mathbf{k})$  и  $q'_{\alpha} = (\omega', \mathbf{k}')$  – 4-импульсы начального и конечного фотонов соответственно.

Как можно видеть из последнего выражения, в случае, когда начальный фотон распространяется поперек магнитного поля, все амплитуды, кроме  $\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}$ , подавлены обратной величиной напряженности магнитного поля. Следовательно, только фотон моды 2 в этом случае будет эффективно удерживаться в плазме.

## 2.4. Коэффициент поглощения фотона и сечение в сильно замагниченной среде

Для анализа эффективности рассматриваемого процесса и сравнения его с другими конкурирующими реакциями мы вычисляем коэффициент поглощения

фотона <sup>2</sup>, который может быть определен следующим образом:

$$W_{\lambda e^{\pm} \rightarrow \lambda' e^{\pm}} = \frac{\beta}{16(2\pi)^4 \omega_{\lambda}} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}|^2 Z_{\lambda} Z_{\lambda'} \times \quad (2.39)$$

$$\times f_{\pm}(E) [1 - f_{\pm}(E')] (1 + f_{\omega'}) \delta(\omega_{\lambda}(\mathbf{k}) + E - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}') - E') \frac{dp_z d^3 k'}{E E' \omega_{\lambda'}},$$

где  $f_{\omega'} = [\exp(\omega'/T) - 1]^{-1}$  – равновесная функция распределения конечных фотонов,  $E = \sqrt{p_z^2 + m^2}$  и  $E' = \sqrt{(p_z + k_z - k'_z)^2 + m^2}$  – энергии начального и конечного электронов (позитронов) соответственно.

Мы рассмотрим коэффициент поглощения (2.39) в двух случаях зарядово симметричной и зарядово несимметричной холодной плазмы.

### 2.4.1. Зарядово симметричная плазма

В зарядово симметричной плазме ( $\mu = 0$ ) и в пределе низких температур ( $T \ll m$ ), пренебрегая функцией распределения фотонов в конечном состоянии, ( $f_{\omega'} = 0$ ), коэффициент поглощения (2.39) может быть выражен в терминах парциальных сечений,  $\sigma_{\lambda \rightarrow \lambda'}$ , для разрешенных каналов следующим образом  $W_{\lambda \rightarrow \lambda'} \equiv W_{\lambda e^{-} \rightarrow \lambda' e^{-}} + W_{\lambda e^{+} \rightarrow \lambda' e^{+}} \simeq n_e \sigma_{\lambda \rightarrow \lambda'}$ , где

$$\sigma_{\lambda \rightarrow \lambda'} = \frac{1}{16(2\pi)^2 m \omega_{\lambda}} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}|^2 Z_{\lambda} Z_{\lambda'} \delta(\omega_{\lambda}(\mathbf{k}) + m - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}') - E') \frac{d^3 k'}{E' \omega_{\lambda'}},$$

$$E' \simeq \sqrt{(k_z - k'_z)^2 + m^2}, \quad (2.40)$$

$$\sigma_{1 \rightarrow 1} = \frac{3}{16} \sigma_T \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{\omega^2}{m^2} \left[ \frac{(2m + \omega \sin^2 \theta)(m + \omega + (m - \omega) \cos^2 \theta)}{(\omega + m)^2 - \omega^2 \cos^2 \theta} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{\omega} \sin^2 \theta \ln \left( \frac{(\omega + m)^2 - \omega^2 \cos^2 \theta}{m^2} \right) \right], \quad (2.41)$$

---

<sup>2</sup> Под термином «коэффициент поглощения фотона» здесь и далее понимается вероятность изменения состояния фотона за счет тех или иных квантовых процессов (рассеяние, расщепление, слияние и т.п.)

$$\begin{aligned}
\sigma_{2 \rightarrow 1} &= \frac{3}{16} \sigma_T \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{q_{\perp}^2}{m^2 \omega} Z_2 \left[ \frac{(2m\omega + q_{\parallel}^2)(2m\omega^2 - (m - \omega)q_{\parallel}^2) \sin^2 \theta}{q_{\parallel}^2 [(\omega + m)^2 \sin^2 \theta - q_{\perp}^2 \cos^2 \theta]} - \right. \\
&\quad \left. - m \ln \left( \frac{(\omega + m)^2 \sin^2 \theta - q_{\perp}^2 \cos^2 \theta}{m^2 \sin^2 \theta} \right) \right], \\
q_{\parallel}^2 &= \omega^2 - q_{\perp}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{1 \rightarrow 2} &= \frac{3}{4} \sigma_T \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{1}{\omega s_{1\parallel}} \int_0^{(m - \sqrt{s_{1\parallel}})^2 / 4m^2} dz \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \frac{H(z)}{z} \right) \times \\
&\quad \times \frac{(\omega + m)(s_{1\parallel} - m^2)^2 - 4m^2 z [m^2(\omega + m) + (\omega + 3m)s_{1\parallel}]}{\sqrt{(s_{1\parallel} - m^2 + 4m^2 z)^2 - 4m^2 s_{1\parallel} z}}, \\
s_{1\parallel} &= (\omega + m)^2 - \omega^2 \cos^2 \theta, \tag{2.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{2 \rightarrow 2} &= 3 \sigma_T \frac{m}{\omega} Z_2 \int_0^{(\sqrt{s_{2\parallel}} - m)^2 / 4m^2} \frac{dz}{\sqrt{(s_{2\parallel} - m^2 + 4m^2 z)^2 - 16m^2 s_{2\parallel} z}} \times \\
&\quad \times \sum_{i=1}^2 \frac{4m^4}{[(q\tilde{\Lambda}q')^2 - \varkappa^2(q\tilde{\varphi}q')^2]^2} \left\{ 4m^2 q_{\parallel}^2 z (4m^2 - Q_{\parallel}^2) \times \right. \\
&\quad \times \left[ 1 - \frac{B_e}{B} \left( \frac{q_{\perp}^2}{4m^2} + z + \frac{3}{2} \xi H(z) \right) \right]^2 + \\
&\quad + \frac{1}{8m^4} \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{q_{\perp}^2 (q\tilde{\varphi}q')^2}{q_{\parallel}^2 (-Q_{\parallel}^2)} \left( 1 + \frac{3}{2} \xi \frac{H(z)}{z} \right) \times \\
&\quad \times \left. \left[ 4m^2 (q\tilde{\Lambda}q') + (q\tilde{\Lambda}q')^2 - \varkappa^2 (q\tilde{\varphi}q')^2 \right]^2 \right\} \Bigg|_{\substack{\omega' = \omega'_i \\ q'_z = q'_{zi}}}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega'_{1,2} &= \frac{1}{2s_{2\parallel}} \left\{ (\omega + m)(s_{2\parallel} - m^2 + 4m^2 z) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{q_{\perp}^2} \operatorname{ctg} \theta \sqrt{(s_{2\parallel} - m^2 + 4m^2 z)^2 - 16m^2 s_{2\parallel} z} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q'_{z1,2} &= \frac{1}{2s_{2\parallel}} \left\{ \sqrt{q_{\perp}^2} \operatorname{ctg} \theta (s_{2\parallel} - m^2 + 4m^2 z) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm (\omega + m) \sqrt{(s_{2\parallel} - m^2 + 4m^2 z)^2 - 16m^2 s_{2\parallel} z} \right\},
\end{aligned}$$

$$s_{2\parallel} = (\omega + m)^2 - q_{\perp}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta,$$

где  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2}$  – томсоновское сечение,  $\xi = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{B}{B_e}$  – параметр, характеризующий влияние магнитного поля,  $\theta$  – угол между направлением импульса начального фотона и магнитным полем,  $q_{\perp}^2$  – корень уравнения  $q_{\perp}^2 = \sin^2 \theta [\omega^2 - \kappa^{(2)}(\omega^2 - q_{\perp}^2 \text{ctg}^2 \theta)]$  и концентрация электронов (позитронов) в сильно замагниченной, зарядово симметричной, разреженной плазме может быть оценена следующим образом

$$n_e \simeq \beta \sqrt{\frac{mT}{2\pi^3}} e^{-m/T}. \quad (2.45)$$

В качестве проверки полученных результатов мы вычислили соответствующие сечения в пределе низких энергий ( $\omega \ll m$ ):

$$\sigma_{1 \rightarrow 1} \simeq \frac{3}{4} \sigma_T \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{\omega^2}{m^2}, \quad (2.46)$$

$$\sigma_{1 \rightarrow 2} \simeq \frac{1}{4} \sigma_T \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{\omega^2}{m^2} (1 + \xi), \quad (2.47)$$

$$\sigma_{2 \rightarrow 1} \simeq \frac{3}{4} \sigma_T \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{(\omega - \omega_p)^2}{m^2} (1 + \xi) \cos^2 \theta \Theta(\omega - \omega_p), \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{2 \rightarrow 2} \simeq & \frac{\sigma_T}{1 + \xi} \left\{ \sin^2 \theta \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{B_e}{B} \right) \left( \frac{\omega}{m} \right)^2 \left( \frac{9}{5} - \cos^2 \theta \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{(\omega - \omega_p)^2}{4m^2} \cos^2 \theta \right\} \Theta(\omega - \omega_p). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Нетрудно видеть, что присутствие замагниченной плазмы слабо влияет на сечение процессов в этом пределе. Более того, поправки, связанные с дисперсией и перенормировкой волновой функции фотона, оказываются существенными только для  $\xi \sim 1$ , т.е. когда магнитное поле будет достаточно сильным,  $B \sim 10^3 B_e$ . В случае магнитных полей  $B \sim 10^{14}$  Гс, которые используются в моделях илечения магнитосфер магнитаров [14],  $\xi \ll 1$ , и формулы (2.46) – (2.48) согласуется с хорошо известным результатом [47]. Однако сечение (2.49) содержит дополнительное слагаемое  $\sim B_e/B$  по сравнению с результатом [47]. Этот

член возникает из разложения экспоненты в амплитуде (2.33) (см. также (2.38)) по параметру напряженности магнитного поля.

Для численного анализа коэффициентов поглощения фотона в условиях горячей плазмы ( $T \sim m$ ) удобно проинтегрировать (2.39) по  $p_z$ . Тогда для  $W_{\lambda \rightarrow \lambda'}$  мы получим следующее простое выражение:

$$\begin{aligned}
 W_{\lambda \rightarrow \lambda'} &= \frac{\beta Z_\lambda}{4(2\pi)^4 \omega_\lambda} \int \frac{d^3 k'}{\varkappa |Q_\parallel^2| \omega_{\lambda'}} |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}|^2 Z_{\lambda'} \\
 &\times (1 + f_{\omega'}) \left\{ \mathcal{F} \left[ -\frac{1}{2T} (Q_0 - Q_z \varkappa), \frac{1}{2T} (Q_0 + Q_z \varkappa) \right] \right. \\
 &\left. \times \Theta(Q_z) + (Q_z \rightarrow -Q_z) \right\}, \tag{2.50}
 \end{aligned}$$

где  $\mathcal{F}(x, y) = [1 + \exp(x)]^{-1} [1 + \exp(-y)]^{-1}$ .

Результаты численного расчета представлены на рис. 2.6 – 2.11. Из рис. 2.6 – 2.9 можно видеть, что коэффициенты поглощения фотона, соответствующие комптоновскому рассеянию для всех кинематически разрешенных каналов, быстро растут с ростом температуры. В то же время каналы с начальным фотоном моды 1 и моды 2 имеют различный характер зависимости коэффициента поглощения от энергии.

Как показано на рис. 2.8 и 2.9, коэффициенты поглощения для реакций  $\gamma_2 e^\pm \rightarrow \gamma_2 e^\pm$  и  $\gamma_2 e^\pm \rightarrow \gamma_1 e^\pm$  имеют порог ( $\omega = \omega_p$ ). Причиной этого является тот факт, что в силу уравнения дисперсии (2.21) для фотона моды 2 с учетом плазменной частоты, электромагнитная волна, соответствующая этой моде, не может распространяться с энергией ниже  $\omega_p$ . В области энергий, близких к плазменной частоте, коэффициент  $W_{2 \rightarrow 2}$  слабо зависит от энергии, тогда как коэффициент  $W_{2 \rightarrow 1}$  стремится к нулю как в окрестности  $\omega_p$ , так и вблизи порога рождения пар,  $\omega = 2m$ . Следует отметить, что в непосредственной близости от порога рождения пар становится очень важным учет дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов, что и определяет, в конечном итоге, зависимость коэффициентов поглощения от значений энергии, температуры

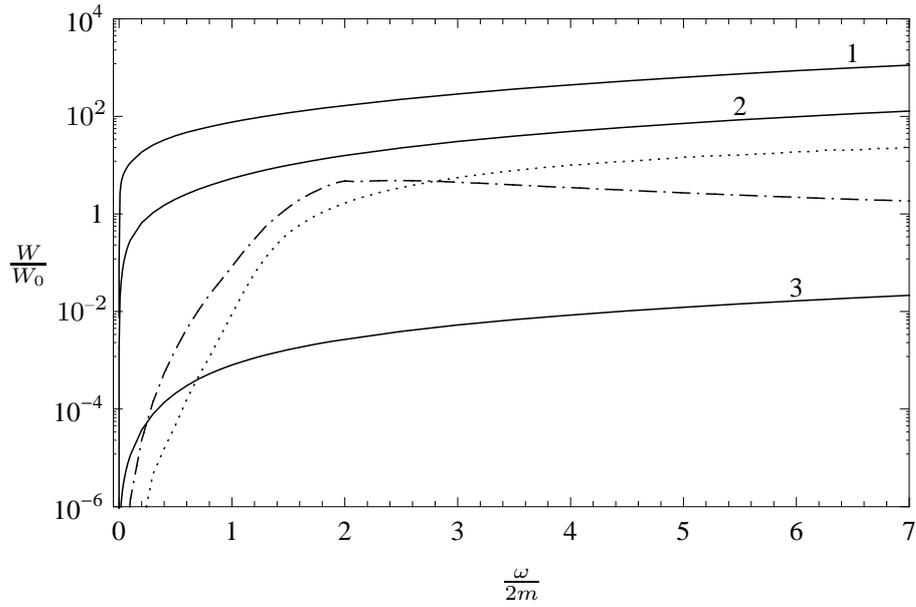


Рис. 2.6. Зависимость коэффициента поглощения  $W_{1 \rightarrow 1}$  для канала  $\gamma_1 e \rightarrow \gamma_1 e$  от энергии начального фотона в сильном магнитном поле  $B/B_e = 200$  при  $T = 1$  МэВ (1),  $T = 250$  кэВ (2) и  $T = 50$  кэВ (3). Точечная и штрихпунктирная линии соответствуют вероятностям расщепления фотона по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ , соответственно, при  $T = 50$  кэВ (см. раздел 3.4.1 главы 3). Здесь  $\theta = \pi/2$ ,  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$ .

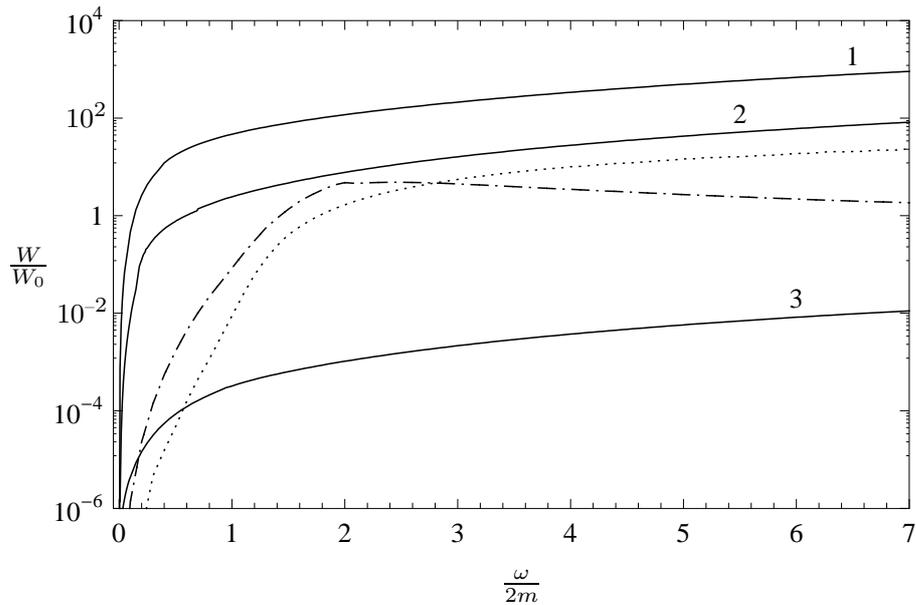


Рис. 2.7. То же, что на рис. 2.6, для канала  $\gamma_1 e \rightarrow \gamma_2 e$ .

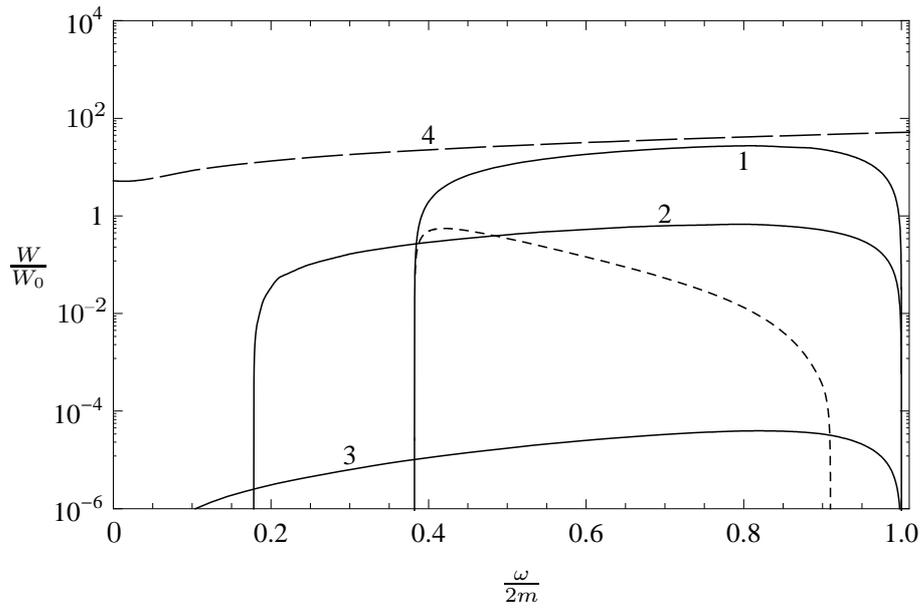


Рис. 2.8. То же, что на рис. 2.6, для канала  $\gamma_2 e \rightarrow \gamma_1 e$ . Штриховая линия (4) соответствует коэффициенту поглощения фотона без учета изменения дисперсионных свойств и перенормировки волновой функции фотона при  $T = 1$  МэВ. Короткие штрихи соответствуют вероятности расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  при  $T = 1$  МэВ (см. раздел 3.4.2 главы 3).

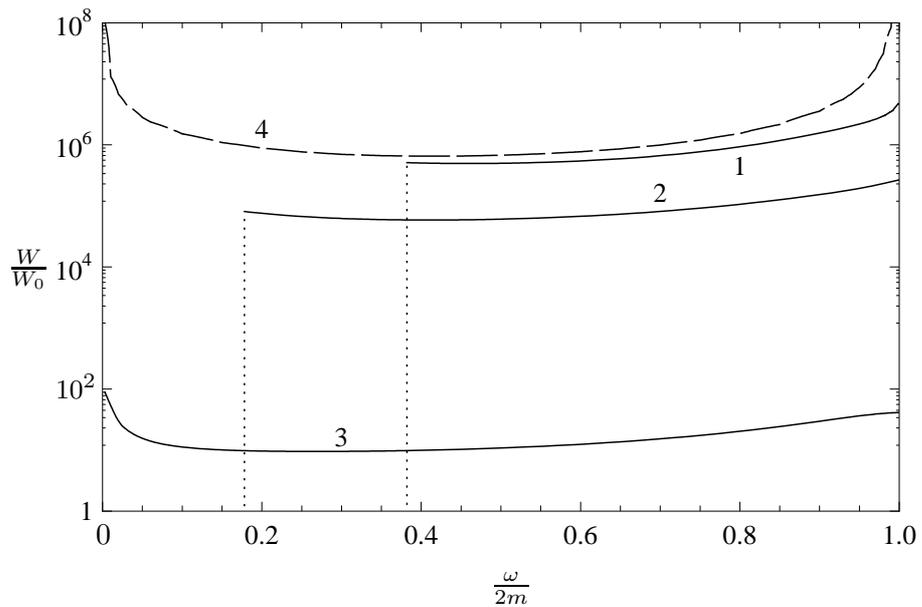


Рис. 2.9. То же, что на рис. 2.8, для канала  $\gamma_2 e \rightarrow \gamma_2 e$ .

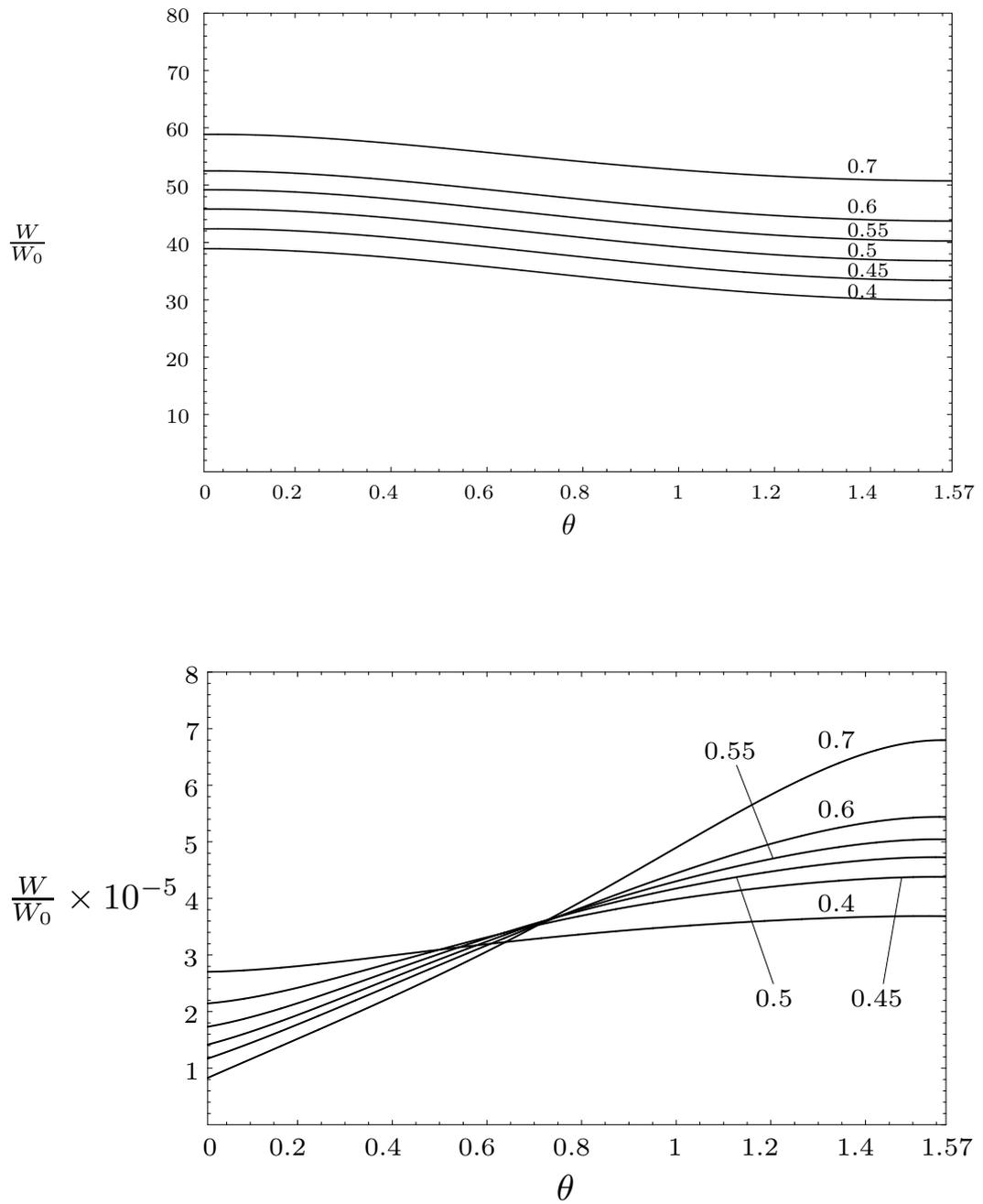


Рис. 2.10. Зависимость коэффициентов поглощения  $W_{1 \rightarrow 1}$  (верхний рисунок) и  $W_{2 \rightarrow 2}$  (нижний рисунок) от угла между импульсом фотона и направлением магнитного поля при различных значениях энергии начального фотона ( $B/B_e = 200$ ,  $T = 1 \text{ МэВ}$ ). Числа на кривых соответствуют отношению  $\omega/2m$ .

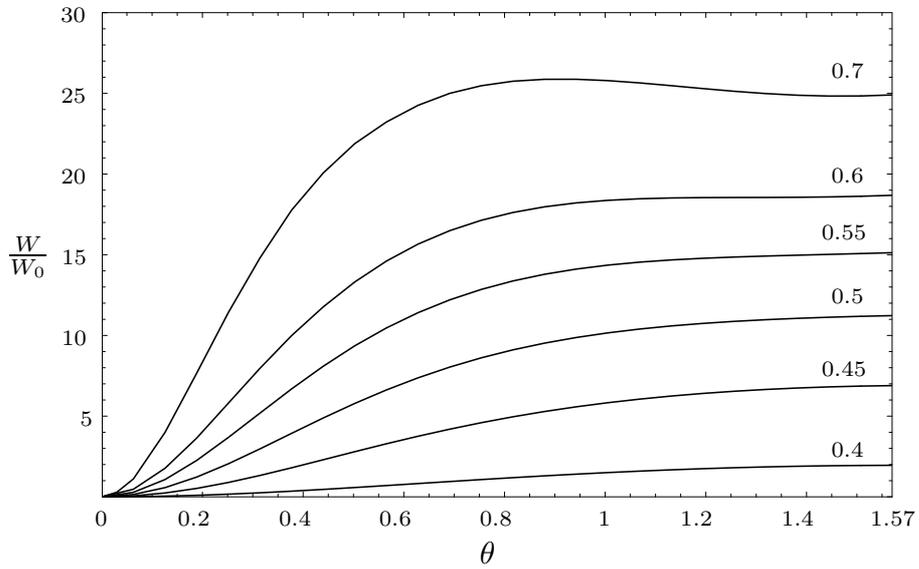
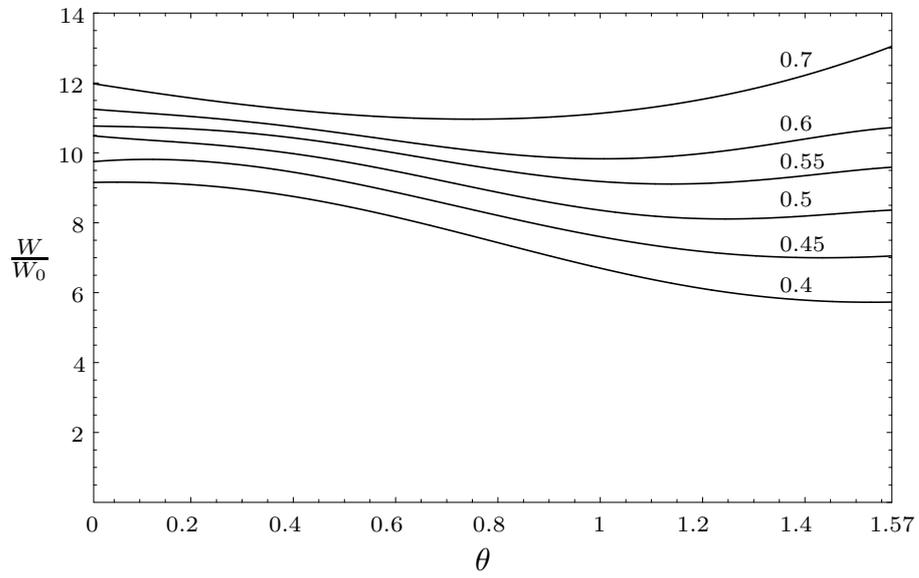


Рис. 2.11. То же, что на рис. 2.10, для коэффициентов поглощения  $W_{1 \rightarrow 2}$  (верхний рисунок) и  $W_{2 \rightarrow 1}$  (нижний рисунок).

и магнитного поля. Это можно непосредственно видеть из сравнения сплошной линии 1, соответствующей рассеянию при  $T = 1$  МэВ,  $B = 200B_e$ , и пунктирной линии 4, представляющей коэффициент поглощения без учета дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов. В области  $\omega \gtrsim 2m$  фотон моды 2 становится нестабильным и может распадаться на электрон-позитронную пару,  $\gamma_2 \rightarrow e^+e^-$ , с вероятностью много большей, чем для комптоновского рассеяния [168].

Кроме того, из рис. 2.6 – 2.7 видно, что соответствующие коэффициенты поглощения для каналов  $\gamma_1 e^\pm \rightarrow \gamma_1 e^\pm$  и  $\gamma_1 e^\pm \rightarrow \gamma_2 e^\pm$  достаточно быстро растут в области малых энергий и слабо зависят от  $\omega$  при  $\omega \gtrsim 2m$ . Такое поведение коэффициента поглощения говорит о том, что фотоны моды 1 будут эффективно диффундировать в области излучения, тогда как фотоны моды 2 окажутся захваченными в этой области (см. рис. 2.8 и 2.9).

Интересно также рассмотреть угловые распределения коэффициентов поглощения фотона, (см. рис. 2.10 и 2.11). Видно, что в горячей плазме угловая зависимость коэффициентов поглощения  $W_{1 \rightarrow 1}$  и  $W_{1 \rightarrow 2}$  близка к изотропному распределению. Это согласуется с пределом низких температур, где угловое распределение строго изотропно (см. (2.46) и (2.47)). Наоборот, коэффициенты поглощения  $W_{2 \rightarrow 1}$  и  $W_{2 \rightarrow 2}$  существенно зависят от угла. Эти коэффициенты будут минимальны при  $\theta = 0$  и имеют максимум, когда фотон моды 2 распространяется поперек направления магнитного поля.

#### 2.4.2. Холодная, почти вырожденная плазма

В другом случае почти вырожденной, холодной плазмы ( $T \ll \mu - m$ ), в рамках условия (2.24), коэффициент поглощения в пределе низких энергий начального фотона ( $\omega \ll 2m$ ) можно представить в следующем виде:

$$W_{1 \rightarrow 1} \simeq \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{B_e}{B} \frac{\omega^3}{m^2 v_F^2} \left\{ (1 - v_F n_z)^2 \int_{t_1}^{t_2} dt t \mathcal{F} \left( \frac{\omega}{T}, t \right) + (n_z \rightarrow -n_z) \right\}, \quad (2.51)$$

$$W_{2 \rightarrow 1} \simeq \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{B_e}{B} \frac{q_\perp^2}{q_\parallel^2} \frac{\omega^3}{m^2 v_F^2} Z_2 \Theta(\omega - \omega_p) \left\{ (v_F - n_z)^2 \int_{t_1}^{t_2} dt t \mathcal{F} \left( \frac{\omega}{T}, t \right) + (n_z \rightarrow -n_z) \right\}, \quad (2.52)$$

$$W_{1 \rightarrow 2} \simeq \frac{\alpha^2}{4\pi} \frac{B_e}{B} \frac{\omega^3}{m^2} \left\{ \Theta \left( \frac{\mu}{m} (1 - n_z v_F) \omega - \omega_p \right) \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt t \mathcal{F} \left( \frac{\omega}{T}, t \right) \times \right. \quad (2.53)$$

$$\times \left( 1 + \frac{m^2}{p_F^2} t - \frac{n_z}{v_F} \right)^2 \left( 1 - \frac{\varkappa^{(2)}(q')}{q_\parallel'^2} \right) \Big|_{q_\parallel'^2 = \omega^2 [(1-t)^2 - (n_z - t/v_F)^2], k'_z = \omega(n_z - t/v_F)} +$$

$$\left. + (n_z \rightarrow -n_z) \right\},$$

$$W_{2 \rightarrow 2} \simeq \frac{\alpha^2}{2\pi} \frac{B}{B_e} \left( \frac{m}{\mu} \right)^6 \frac{q_\parallel^2}{\omega v_F^4} Z_2 \left\{ \frac{\Theta \left( \frac{\mu}{m} (1 - n_z v_F) \omega - \omega_p \right)}{(1 - n_z v_F)^4} \int_{t_1^*}^{t_2^*} dt t \mathcal{F} \left( \frac{\omega}{T}, t \right) \times \right. \quad (2.54)$$

$$\times [v_F^2 (1-t)^2 - (n_z v_F - t)^2] \left[ \left( 1 - \frac{q_\perp^2}{4m^2} \frac{B_e}{B} - \frac{q_\parallel'^2 - \varkappa^{(2)}(q')}{4m^2} \frac{B_e}{B} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu^2 \omega^2}{2m^4} \left( \frac{B_e}{B} \right)^2 \frac{q_\perp^2}{q_\parallel'^2} \left( 1 - \frac{\varkappa^{(2)}(q')}{q_\parallel'^2} \right) \frac{(1 - n_z v_F)^2}{(1 - n_z^2)^4} \left( 1 - n_z^2 - t \left( 1 - \frac{n_z}{v_F} \right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\mu^2}{m^2} (1 - n_z v_F)^2 \right)^2 \right] \Big|_{q_\parallel'^2 = \omega^2 [(1-t)^2 - (n_z - t/v_F)^2], k'_z = \omega(n_z - t/v_F)} + (n_z \rightarrow -n_z) \left. \right\},$$

где

$$\mathcal{F}(x, t) = [1 - \exp(-xt)]^{-1} [1 - \exp(-x(1-t))]^{-1},$$

$$t_{2,1} = \pm \frac{v_F}{1 \pm v_F} (1 \pm n_z),$$

$$t_{2,1}^* = -\frac{v_F}{1 - v_F^2} \left( v_F - n_z \mp \sqrt{(1 - v_F n_z)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} (1 - v_F^2)} \right),$$

$$n_z = v_\phi^{-1} = \frac{\sqrt{q_\perp^2}}{\omega} \operatorname{ctg} \theta.$$

Здесь учтено следующее приближение:

1. под интегралом в формуле (2.39) статистические факторы начального и конечного электронов в случае почти вырожденной плазмы,  $T \ll \mu - m$ , представляют собой функции, близкие к ступенчатым;
2. статистические факторы начального и конечного электронов перекрываются при условии, когда разность энергий конечного и начального электронов положительна, т.е.  $Q_0 = E' - E > 0$ ;
3. из закона сохранения энергии следует, что величина  $Q_0$  оказывается порядка температуры. Действительно, для процесса  $e\gamma \rightarrow e\gamma$ ,  $Q_0 = E' - E \lesssim \omega$ , где  $\omega$  – энергия начального фотона, масштаб которой имеет порядок температуры  $T$ ;
4. при сделанных предположениях область перекрытия статистических факторов оказывается очень узкой, порядка  $Q_0 \ll \mu - m$ , а их площадь перекрытия  $s$  легко вычисляется и равна:

$$s = \int_m^\infty \frac{dE}{\exp\left(\frac{E-\mu}{T}\right) + 1} \frac{1}{\exp\left(-\frac{E'-\mu}{T}\right) + 1} \simeq \frac{Q_0}{1 - \exp(-Q_0/T)}$$

в пренебрежении экспоненциальными поправками порядка

$$T \exp[-(\mu - m)/T].$$

Результаты численного интегрирования коэффициента поглощения (2.39) для различных энергий фотона в области  $\omega \lesssim 2\mu$  представлены на рис. 2.12 – 2.15. Анализ показывает, что приближенные выражения (2.51) – (2.54) с точностью 5 % согласуются с полученными численно кривыми для кинематически разрешенных каналов  $\gamma_1 e \rightarrow \gamma_1 e$ ,  $\gamma_1 e \rightarrow \gamma_2 e$ ,  $\gamma_2 e \rightarrow \gamma_1 e$  и  $\gamma_2 e \rightarrow \gamma_2 e$  в области

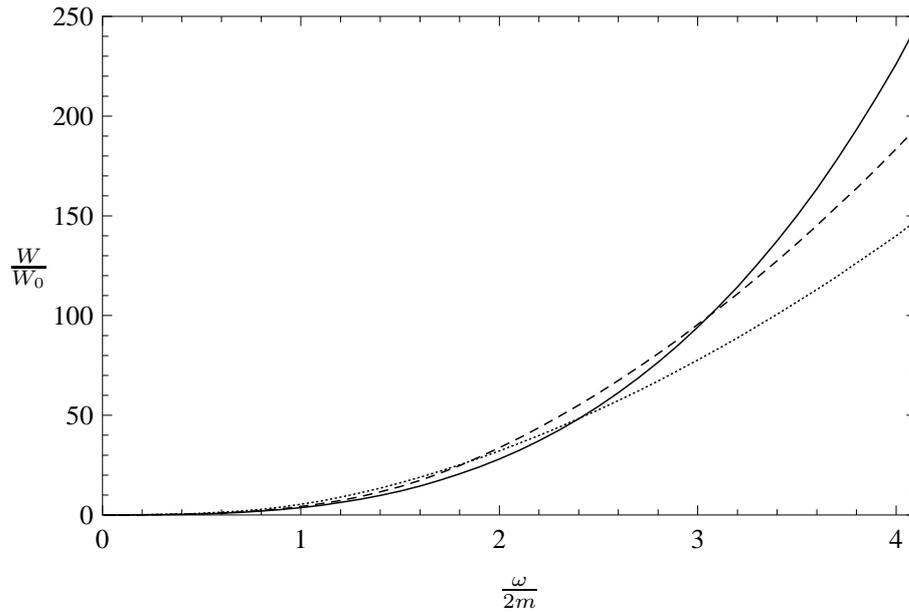


Рис. 2.12. Зависимость коэффициента поглощения  $W_{1 \rightarrow 1}$  для канала  $\gamma_1 e \rightarrow \gamma_1 e$  от энергии начального фотона в сильном магнитном поле  $B/B_e = 200$  и  $T = 50$  кэВ при  $\mu = 2$  МэВ – сплошная линия,  $\mu = 1$  МэВ – штриховая линия,  $\mu = 750$  кэВ – пунктирная линия. Здесь  $\theta = \pi/2$ .

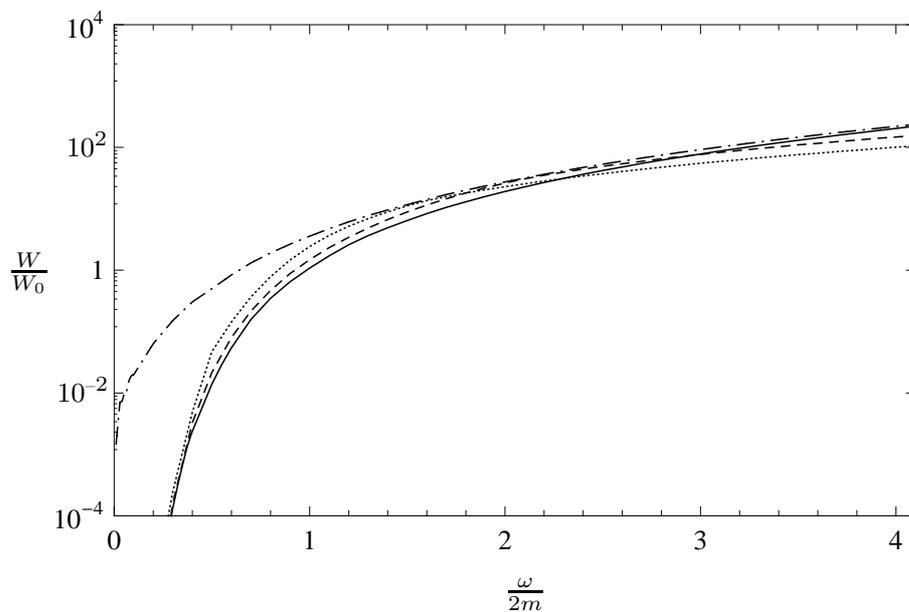


Рис. 2.13. То же, что на рис. 2.12, для канала  $\gamma_1 e \rightarrow \gamma_2 e$ . Штрихпунктирная линия соответствует коэффициенту поглощения без учета дисперсии и перенормировки волновой функции фотона при  $\mu = 2$  МэВ.

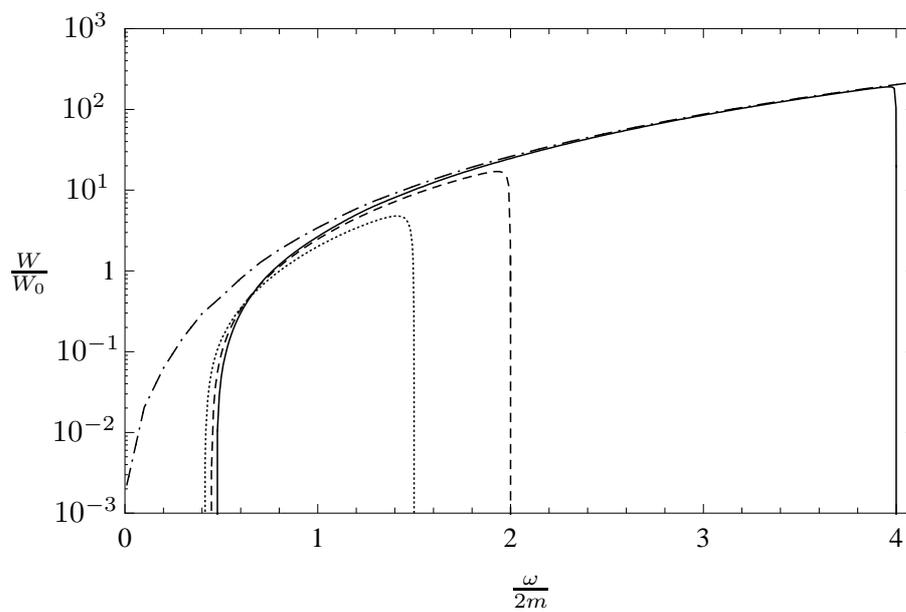


Рис. 2.14. То же, что на рис. 2.13, для канала  $\gamma_2 e \rightarrow \gamma_1 e$ .

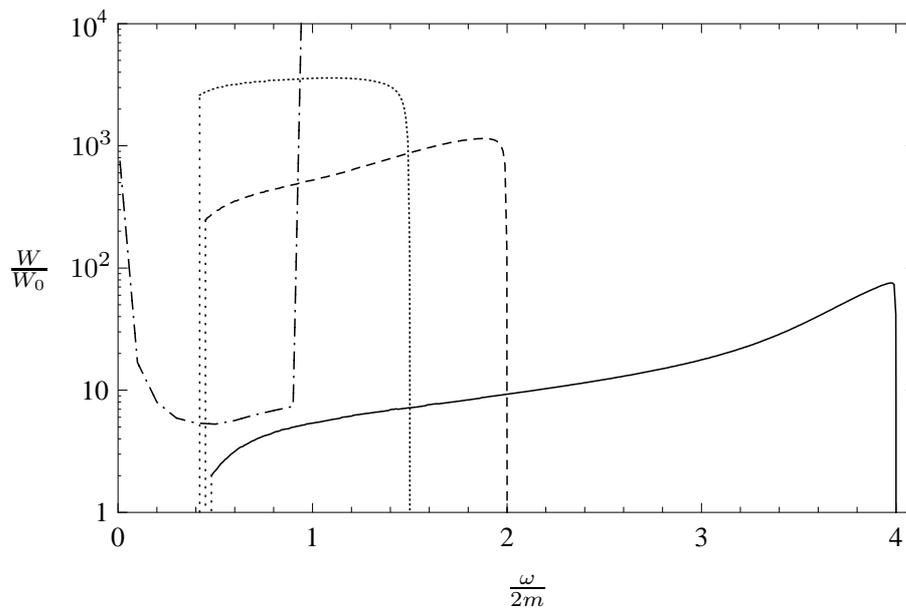


Рис. 2.15. То же, что на рис. 2.13, для канала  $\gamma_2 e \rightarrow \gamma_2 e$ .

энергий начального фотона  $\omega \lesssim 8t$  при  $\mu = 4t$ ,  $\omega \lesssim 6t$  при  $\mu = 2t$  и только с 30 % - ной точностью для  $\omega \lesssim 8t$  при  $\mu = 1.5t$  для величины магнитного поля  $B = 200B_e$  и температуры  $T = 50$  кэВ. Это дает возможность использовать приближенные коэффициенты поглощения (2.51) – (2.54) при решении задачи переноса излучения.

Точно так же, как и в случае зарядово симметричной плазмы, мы можем видеть важность влияния дисперсии фотонов и больших радиационных поправок на процесс комптоновского рассеяния в рассматриваемых условиях. Этот факт непосредственно иллюстрируется на рис. 2.15 путем сравнения сплошной и штриховой линий, которые соответствуют коэффициенту поглощения с учетом и без учета дисперсионных свойств фотона и перенормировки его волновой функции. Как мы можем видеть из рис. 2.12 – 2.15, коэффициенты поглощения имеют существенно различные зависимости от энергии и химического потенциала для фотонов первой и второй мод. С одной стороны, вероятности изменения состояния фотона  $W_{1 \rightarrow 1}$  и  $W_{1 \rightarrow 2}$  сильно зависят от частоты начального фотона, что дает определенные основания ожидать эффективной диффузии фотонов моды 1, так же, как и в случае горячей плазмы. С другой стороны, нетрудно видеть, что в противовес другим каналам, вероятность изменения состояния фотона  $W_{2 \rightarrow 2}$  сильно зависит от химического потенциала. Интересно заметить, что в области излучения с большим химическим потенциалом вероятности для каналов  $\gamma_{2e} \rightarrow \gamma_{1e}$  и  $\gamma_{2e} \rightarrow \gamma_{2e}$  оказываются сравнимыми (см. сплошные линии на рис. 2.14 – 2.15), и можно ожидать эффективного переноса излучения, обусловленного фотонами моды 2. Однако в области излучения с малым  $\mu$  видно, что большая величина и слабая зависимость от энергии  $W_{2 \rightarrow 2}$  может привести к эффективному захвату фотонов моды 2.

В заключение этой главы отметим, что мы здесь не обсуждаем сравнение коэффициентов поглощения, соответствующих процессам рассеяния и расщепления фотона (см. рис. 2.6 – 2.8). Этот вопрос будет рассмотрен далее в главе 3.

## Глава 3

# Расщепление фотона в сильно замагниченной плазме

## 3.1. Введение

Процесс расщепления фотона на два фотона представляет собой один из ярких примеров влияния внешней активной среды на реакции с элементарными частицами. Несмотря на то, что этот процесс запрещен в вакууме симметрией относительно операции зарядового сопряжения, известной в КЭД как теорема Фарри, он оказывается возможным в присутствии внешнего электромагнитного поля и/или плазмы. При довольно долгой истории исследования [77, 78, 81, 163, 169–174] (для обзора см. также [21, 76, 155, 164]) процесс расщепления фотона до сих пор представляет огромный интерес в связи с его возможными астрофизическими приложениями.

Примечательно, что такой экзотический процесс может привести к ряду наблюдаемых физических проявлений в астрофизических объектах. Например, потеря энергии фотонами за счет реакции  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  может приводить к смягчению спектров гамма-излучения нейтронных звезд. В частности, предполагается, что расщепление фотона может объяснить особенности в спектре гамма-излучения некоторых радиопульсаров [175].

Существует еще одно интересное применение рассматриваемого процесса к радиотихим источникам мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) и аномальным рентгеновским пульсарам (АХР). Поскольку расщепление фотона не имеет порога, высокоэнергетические фотоны, распространяющиеся под очень малыми углами к магнитному полю в магнитосфере нейтронной звезды, могут расщепляться раньше, чем их энергии и импульсы будут достаточными для рождения  $e^+e^-$  пар. Таким образом, этот процесс может изменить эффектив-

ность производства электрон-позитронных пар, необходимых для дальнейшей генерации радиоизлучения [176–179].

Обсуждаемый процесс также играет важную роль в модели вспышек SGR [12, 13]. Согласно этой модели, в магнитосфере магнитара вблизи его поверхности формируется относительно долго живущая область, занятая захваченной магнитным полем горячей  $e^+e^-$  плазмой и находящимися в термодинамическом равновесии с ней фотонами (так называемый "trapped fireball"). Следует отметить, что в данной астрофизической модели процесс расщепления фотона рассматривался только в присутствии сильного магнитного поля, тогда как влияние горячей электрон-позитронной плазмы не учитывалось. С другой стороны, плазма может существенно изменить вероятность расщепления фотонов.

Существует два направления учета влияния замагниченной плазмы на процесс расщепления фотона. С одной стороны, она модифицирует дисперсионные свойства фотонов. С другой стороны, замагниченная плазма модифицирует амплитуду процесса. Первый эффект был изучен ранее в работах [163, 180]. В частности, в работе [163] было показано, что в случае холодной слабо замагниченной плазмы кинематика процесса и правила отбора по поляризациям остаются такими же, как и в чистом магнитном поле, если концентрация электронов относительно невысока ( $n_e \lesssim 10^{19} \text{см}^{-3}$ ). В работе [180] было получено выражение для вероятности расщепления фотона в замагниченной плазме с использованием лагранжиана Гейзенберга-Эйлера для построения эффективного шестифотонного взаимодействия с учетом дисперсии фотона в плазме, хотя амплитуда процесса была получена в пределе слабого магнитного поля без плазмы. В этой работе также было показано, что в таком приближении влияние плазмы оказывается пренебрежимо малым, за исключением достаточной узкой области изменения параметров плазмы и магнитного поля.

Влияние слабого магнитного поля и среды произвольной температуры на модификацию амплитуды расщепления фотона было рассмотрено в рабо-

тах [181, 182] также на основе лагранжиана Гейзенберга-Эйлера, с учетом одной и двухпетлевых температурных поправок соответственно. Было показано, что в пределе низких температур реакция  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  может конкурировать с другими астрофизическими процессами, например, с комптоновским рассеянием.

Несколько иная ситуация рассмотрена в работе [183]. Используя разложение пропагатора электрона по величине магнитного поля, авторы вычислили амплитуду расщепления и коэффициент поглощения фотона в пределе больших энергий фотонов. Основным вывод этой работы – влияние плазмы оказывается в этом случае пренебрежимо малым. Однако оценки коэффициентов поглощения для процесса расщепления фотона, полученные в работе [183], являются не совсем верными, поскольку представленные выражения справедливы только в пределе низких энергий фотонов. Кроме того, в работах [181–183] не была учтена дисперсия фотона в замагниченной плазме. Вместе с тем, ситуация может существенным образом измениться в пределе сильного поля, который ранее не рассматривался. Следует отметить также, что в указанных работах совместный анализ влияния замагниченной плазмы как на дисперсионные свойства фотонов, так и на изменение амплитуды расщепления фотона не проводился.

В отличие от чистого магнитного поля, в присутствии плазмы фотон может также непосредственно рассеиваться на электронах и позитронах (комptonовское рассеяние). Более того, в плазме необходимо также учитывать обратный процесс слияния двух фотонов,  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$ . Процесс комptonовского рассеяния был подробно рассмотрен в главе 2. Процесс слияния фотонов изучался в [12] как один из доминирующих процессов, изменяющих число фотонов для случая низких энергий и магнитного поля без плазмы.

Таким образом, можно сделать вывод, что самосогласованного исследования расщепления/слияния фотонов с учетом модификации как дисперсионных свойств фотонов, так и амплитуды процесса в замагниченной среде не проводились. Кроме того, случай относительно сильного магнитного поля,  $B \gtrsim B_e$ , и горячей  $e^+e^-$  - плазмы, важный для астрофизических приложений, не был

исследован для процесса расщепления фотона.

В настоящей главе мы попытаемся заполнить этот пробел. Процессы расщепления/слияния фотонов,  $\gamma \leftrightarrow \gamma\gamma$ , рассматриваются в случае сильно замагниченной  $e^+e^-$  плазмы, когда магнитное поле напряженности  $B$  является максимальным физическим параметром, а именно  $\sqrt{\beta} \gg T, \mu, \omega$ . Здесь  $T$  – температура плазмы,  $\mu$  – химический потенциал,  $\omega$  – энергия начального фотона. При таких условиях можно считать, что электроны и позитроны плазмы занимают основной уровень Ландау. Более аккуратное соотношение для магнитного поля и параметров плазмы в этом случае можно получить из условия, что плотность энергии магнитного поля будет много больше, чем плотность энергии плазмы [184]. Например, в случае ультрарелятивистской плазмы это условие приводит к следующему соотношению

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2(n_{e^-} - n_{e^+})^2}{\beta} + \frac{\beta T^2}{12}, \quad (3.1)$$

где  $n_{e^-}, n_{e^+}$  – концентрации электронов и позитронов.

В разделе 3.2 вычисляется амплитуда расщепления фотона в сильном магнитном поле и плазме в общем случае ненулевого химического потенциала и температуры.

В разделе 3.3 анализируется кинематика процесса  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  и рассматриваются изменения правил отбора по поляризациям фотонов.

Численный анализ вероятностей изменения состояния фотона за счет процессов расщепления и слияния проведен в разделе 3.4.

Обсуждение возможных астрофизических приложений дано в разделе 3.5.

Глава основана на результатах работ [155, 158, 164].

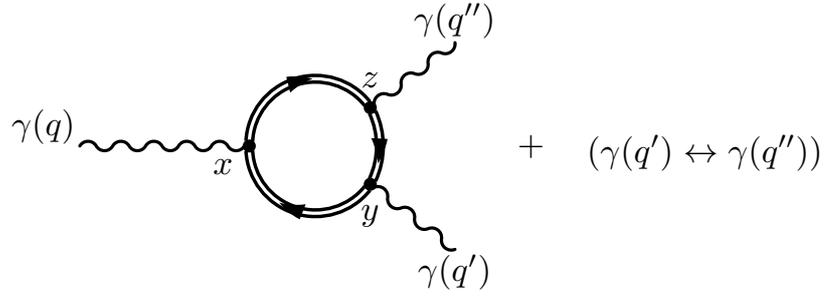


Рис. 3.1. Диаграммы Фейнмана для процесса расщепления фотона в магнитном поле.

### 3.2. Амплитуда процесса расщепления фотона

Амплитуда рассматриваемого процесса может быть представлена в виде суммы двух членов

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_B + \mathcal{M}_{pl}, \quad (3.2)$$

где  $\mathcal{M}_B$  – амплитуда в замагниченном вакууме ( $\mu = T = 0$ ). Она описывается двумя диаграммами Фейнмана, рис. 3.1, и может быть получена из работ [22, 81, 82].

Второй член в (3.2) описывает вклад плазмы и может трактоваться как когерентное рассеяние фотона на реальных электронах и позитронах без изменения их состояния с испусканием двух фотонов (так называемое рассеяние «вперед»). Эти вклады изображаются диаграммами Фейнмана на рис. 3.2, где внутренние двойные линии соответствуют электронному пропагатору в магнитном поле.

После довольно продолжительных, но относительно несложных вычислений, детали которых можно найти в приложении Г, получим следующее выражение для амплитуды:

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\mu(q) \varepsilon_\nu^*(q'') \varepsilon_\rho^*(q') \Pi_{\mu\nu\rho}, \quad (3.3)$$

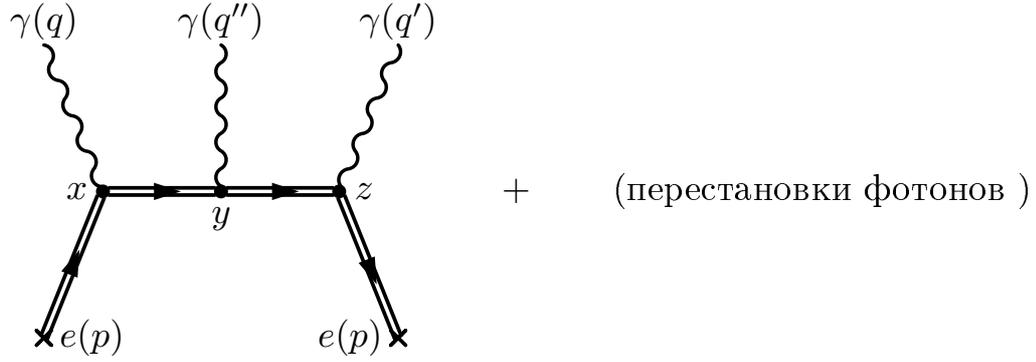


Рис. 3.2. Диаграммы Фейнмана для процесса рассеяния фотона на электронах замагниченной плазмы с излучением двух фотонов. Рассеянию на позитронах будут соответствовать диаграммы с заменой  $p \rightarrow -p$ . Крестики на концах электронных линий означают, что такие частицы принадлежат среде.

где

$$\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu\rho} = & \beta \frac{e^3}{4\pi^2} \frac{(\tilde{\varphi}q)_\mu (\tilde{\varphi}q'')_\nu (\tilde{\varphi}q')_\rho}{(q' \tilde{\varphi} q'')} \left[ \mathcal{J}_2^{(-)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q'_{\parallel}, -q_{\parallel}) - \right. \\
& - \left. \mathcal{J}_2^{(-)}(-q''_{\parallel}, q'_{\parallel}) - (q' \leftrightarrow q'') \right] - \frac{ie^3}{2\pi^2} \{ (q' \varphi q'') [\pi_{\mu\nu\rho} + \nu_{\mu\nu\rho}] + \\
& + (q' \mathcal{G}(q''))_\nu \varphi_{\rho\mu} + \frac{1}{2} ((q'' - q') \mathcal{G}(q))_\mu \varphi_{\nu\rho} + (q'' \mathcal{G}(q'))_\rho \varphi_{\nu\mu} - \\
& - \mathcal{G}_{\nu\rho}(q'') (q' \varphi)_\mu + \mathcal{G}_{\mu\nu}(q'') (q \varphi)_\rho + \mathcal{G}_{\mu\rho}(q') (q \varphi)_\nu - \mathcal{G}_{\nu\rho}(q') (q'' \varphi)_\mu - \\
& - \mathcal{G}_{\mu\nu}(q) (q'' \varphi)_\rho - \mathcal{G}_{\mu\rho}(q) (q' \varphi)_\nu - \frac{i(\tilde{\varphi}q)_\mu (\tilde{\varphi}q'')_\nu (\tilde{\varphi}q')_\rho}{4(q' \tilde{\varphi} q'')} \times \\
& \times [q_{\perp}^2 + q''_{\perp}^2 + (q' q'')_{\perp}] [\mathcal{J}_2^{(-)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q'_{\parallel}, -q_{\parallel}) - \\
& - \left. \mathcal{J}_2^{(-)}(-q''_{\parallel}, q'_{\parallel}) - (q' \leftrightarrow q'') \right] \}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(q) = \left( \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \frac{q_{\parallel\mu} q_{\parallel\nu}}{q_{\parallel}^2} \right) \mathcal{G}(q_{\parallel}), \tag{3.5}$$

$$\mathcal{G}(q_{\parallel}) = \left[ H\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}\right) + \mathcal{J}_1(q_{\parallel}) \right], \tag{3.6}$$

$$\mathcal{J}_1(q_{\parallel}) = 2q_{\parallel}^2 m^2 \int \frac{dp_z}{E} \frac{f_-(E) + f_+(E)}{q_{\parallel}^4 - 4(pq)_{\parallel}^2}, \quad (3.7)$$

$$\mathcal{J}_2^{(\pm)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) = 2m^2 \int \frac{dp_z}{E} \frac{f_-(E) \pm f_+(E)}{[q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}][q'_{\parallel}^2 + 2(pq'_{\parallel})]}, \quad (3.8)$$

где функция  $H(z)$  определяется согласно формуле (2.7) главы 2.

Выражение для  $\pi_{\mu\nu\rho}$  может быть представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu\rho} = & \frac{1}{q_{\parallel}^2 q'_{\parallel}{}^2 q''_{\parallel}{}^2} \left[ (q' \tilde{\varphi} q'') \{ (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} \pi_{\perp} + (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\Lambda} q'')_{\nu} (\tilde{\Lambda} q')_{\rho} H \right. \\ & - (\tilde{\Lambda} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\Lambda} q')_{\rho} H'' - (\tilde{\Lambda} q)_{\mu} (\tilde{\Lambda} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} H' \} \\ & + (q' q'')_{\parallel} (\tilde{\Lambda} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} (H' - H'') \\ & + (q q'')_{\parallel} (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\Lambda} q')_{\rho} (H - H'') \\ & \left. + (q q')_{\parallel} (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\Lambda} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} (H' - H) \right], \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{\perp} = & H + H' + H'' \\ & + 2 \frac{q_{\parallel}^2 q'_{\parallel}{}^2 q''_{\parallel}{}^2 - 2m^2 [q_{\parallel}^2 (q' q'')_{\parallel} H - q'_{\parallel}{}^2 (q q'')_{\parallel} H' - q''_{\parallel}{}^2 (q q')_{\parallel} H'']}{q_{\parallel}^2 q'_{\parallel}{}^2 q''_{\parallel}{}^2 - 4m^2 [q'_{\parallel}{}^2 q''_{\parallel}{}^2 - (q' q'')_{\parallel}^2]}, \quad (3.10) \end{aligned}$$

где  $H \equiv H(4m^2/q_{\parallel}^2)$ ,  $H' \equiv H(4m^2/q'_{\parallel}{}^2)$ ,  $H'' \equiv H(4m^2/q''_{\parallel}{}^2)$ .

Выражение для  $v$  может быть представлено в виде:

$$v_{\mu\nu\rho} = \pi_{\mu\nu\rho} [\pi_{\perp} \rightarrow v_{\perp}, H \rightarrow \mathcal{J}_1(q_{\parallel}), H' \rightarrow \mathcal{J}_1(q'_{\parallel}), H'' \rightarrow \mathcal{J}_1(q''_{\parallel})],$$

$$\begin{aligned} v_{\perp} = & \frac{1}{(q' \tilde{\varphi} q'')^2} \left\{ (q q')_{\parallel} (q q'')_{\parallel} \mathcal{J}_1(q_{\parallel}) - (q q')_{\parallel} (q' q'')_{\parallel} \mathcal{J}_1(q'_{\parallel}) - \right. \\ & - (q q'')_{\parallel} (q' q'')_{\parallel} \mathcal{J}_1(q''_{\parallel}) + \frac{q_{\parallel}^2 q'_{\parallel}{}^2 q''_{\parallel}{}^2}{4} \left[ \mathcal{J}_2^{(+)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) + \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{J}_2^{(+)}(-q'_{\parallel}, -q_{\parallel}) + \mathcal{J}_2^{(+)}(-q''_{\parallel}, q'_{\parallel}) + (q' \leftrightarrow q'') \right] \right\}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Полученное выражение для амплитуды явно калибровочно-инвариантно, так как

$$q_{\mu} \Pi_{\mu\nu\rho} = q'_{\nu} \Pi_{\mu\nu\rho} = q'_{\rho} \Pi_{\mu\nu\rho} = 0, \quad (3.12)$$

и обладает в кинематической области  $q_{\parallel}^2 \leq 4m^2$  свойством

$$\mathcal{M}(q, q', q'') = [\mathcal{M}(-q, -q', -q'')]^* . \quad (3.13)$$

Как было показано в работе [164], выражение для амплитуды (3.2) получено в системе покоя плазмы. Однако оно может быть обобщено также и на случай, когда плазма движется, как целое, вдоль магнитного поля. Для этого достаточно в функциях распределения электронов и позитронов, входящих в интегралы (3.7) и (3.8), сделать следующую замену:  $f_{\pm}(E) \rightarrow f_{\pm}(p)$  (см. раздел 2.2 главы 2), где  $u_{\mu}$  - вектор 4-скорости среды ( $u^2 = 1$ ) [26, 185]. Напомним, что отсутствие в такой системе электрического поля может быть записано в релятивистски-ковариантном виде:  $(u\Lambda)_{\mu} = 0$  [59]. Заметим также, что в отличие от случая электрон-позитронной плазмы без магнитного поля, где введение вектора 4-скорости среды необходимо для ковариантной записи двух- или трехфотонной вершин [26, 185], в присутствии магнитного поля, как это видно из полученного нами результата, возможно представление трехфотонной вершины в ковариантной форме без использования вектора  $u_{\mu}$ . Это связано с тем, что из тензора поля и 4-вектора импульса можно построить ортогональный базис вида (2.1), в котором любой тензор можно представить в ковариантной форме.

Амплитуду процесса, записанную в виде (3.2), можно использовать для получения амплитуды процесса распада аксиона в два фотона, ( $a \rightarrow \gamma\gamma$ ) и амплитуды перехода двух фотонов в нейтрино-антинейтринную пару ( $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ ), с помощью замены

$$\mathcal{M}_{a \rightarrow \gamma\gamma} = \mathcal{M}\left(\varepsilon_{\mu} \rightarrow q_{\mu} \frac{ig_{ae}}{2me}, \Pi_{\mu\nu\rho} \rightarrow \tilde{\varphi}_{\mu\sigma} \Pi_{\sigma\nu\rho}\right) \quad (3.14)$$

и

$$\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\nu} = \mathcal{M}\left(\varepsilon_{\mu} \rightarrow j_{\mu} \frac{G_F}{\sqrt{2}e}, \Pi_{\mu\nu\rho} \rightarrow C_V \Pi_{\mu\nu\rho} - C_A \tilde{\varphi}_{\mu\sigma} \Pi_{\sigma\nu\rho}\right) \quad (3.15)$$

соответственно.

Напомним (см. раздел 1.2 главы 1), что  $C_V$ ,  $C_A$  – векторная и аксиальная константы эффективного  $\nu\nu e e$  - лагранжиана стандартной модели,  $C_V = \pm 1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $C_A = \pm 1/2$ ,  $\theta_W$  – угол Вайнберга, верхний знак относится к электронному нейтрино, нижний знак соответствует мюонному и тау-нейтрино;  $j_\mu$  – фурье-образ нейтринного тока,  $g_{ae}$  – безразмерная константа аксион-электронного взаимодействия.

Здесь интересно отметить следующее обстоятельство. Известно, что в сильном магнитном поле амплитуды процессов  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и  $a \rightarrow \gamma\gamma$  не зависят от величины поля [186, 187]. Присутствие же зарядово-несимметричной ( $\mu \neq 0$ ) плазмы, как это видно из (3.2) и (3.4), приводит к линейному росту амплитуд указанных процессов с ростом напряженности магнитного поля. Этот факт может оказаться важным при рассмотрении различных приложений этих процессов в астрофизике.

### 3.3. Кинематика и правила отбора

Как было отмечено во Введении к данной главе и показано в разделе 2.2 главы 2, замагниченная плазма влияет не только на амплитуду процесса расщепления, но также и на дисперсионные свойства фотонов и, следовательно, может изменить кинематику реакции.

В этом разделе исследуется кинематика процессов  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  и  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$  в сильно замагниченной плазме. В замагниченном вакууме удобно представить закон дисперсии фотона моды  $\lambda$  в виде  $q_\parallel^2 = f^{(\lambda)}(q_\perp^2)$  [59]. Из закона сохранения энергии следует, что реакция расщепления фотона будет кинематически открыта только при выполнении условия:

$$\sqrt{q_\parallel^2} \geq \sqrt{q'_\parallel{}^2} + \sqrt{q''_\parallel{}^2}. \quad (3.16)$$

Используя закон дисперсии, можно записать

$$\sqrt{f^{(\lambda)}(q_\perp^2)} \geq \sqrt{f^{(\lambda')}(q'_\perp{}^2)} + \sqrt{f^{(\lambda'')}(q''_\perp{}^2)}. \quad (3.17)$$

Анализ решений уравнения дисперсии показывает, что в области ниже порога рождения пары ( $q_{\parallel}^2 = 4m^2$ ) функция  $f^{(\lambda)}(q_{\perp}^2)$  является монотонной и однозначной, и неравенства

$$f^{(\lambda)}(q_{\perp}^2) \leq q_{\perp}^2, \quad f^{(2)}(q_{\perp}^2) < f^{(1)}(q_{\perp}^2) \quad (3.18)$$

справедливы на всем интервале  $0 \leq q_{\perp}^2 < \infty$ . Из этих условий и неравенства (3.16) немедленно следует, что только каналы расщепления  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2, \gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  кинематически открыты ниже порога рождения пар [81, 163, 188, 189]. Это совпадает с правилами отбора, полученными Адлером в слабом магнитном поле [163].

Ранее считалось, что расщеплением фотона можно пренебречь в области  $q_{\parallel}^2 > 4m^2$  по сравнению с процессом рождения пар  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ . Это справедливо в случае не очень сильных полей,  $B \lesssim B_e$ , когда резонансы поляризационного оператора, соответствующие порогам рождения электронов и позитронов на различных уровнях Ландау, близки друг к другу. В сильном магнитном поле щель между двумя первыми резонансами становится шире. В этом случае фотон моды 2 может распадаться на  $e^+e^-$  пару только вблизи первого резонанса  $q_{\parallel}^2 = 4m^2$ , тогда как для фотона моды 1 низший порог рождения пар определяется условием  $q_{\parallel}^2 = m^2(1 + \sqrt{1 + 2B/B_e})^2 \simeq 2\beta$ . Следовательно, в кинематической области  $4m^2 < q_{\parallel}^2 < 2\beta$ , в рамках КЭД, расщепление фотона будет единственным механизмом поглощения для фотона моды 1. Совершенно очевидно, что фотон моды 1 в этой области может расщепляться по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2, \gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ , если фотоны моды 2 в конечном состоянии рождаются с  $q_{\parallel}^2$  ниже  $4m^2$  [81]. Строго говоря, фотон моды 2 может также расщепляться вблизи порога рождения пар. Однако, как это было упомянуто выше, соответствующая вероятность расщепления пренебрежимо мала по сравнению с шириной процесса  $\gamma_2 \rightarrow e^+e^-$ .

Присутствие плазмы может изменить правила отбора, описанные выше. Как было показано в разделе 2.2 главы 2, только собственное значение  $\kappa^{(2)}(q)$

модифицируется в сильно замагниченной зарядово симметричной плазме. Это означает, что закон дисперсии фотона моды 1 в такой плазме остается таким же, как и в замагниченном вакууме, где  $q^2 \simeq 0$ , и 4-импульс такого фотона остается при этом пространственно подобным. С другой стороны, дисперсионные свойства фотона моды 2 существенно отличаются от замагниченного вакуума. В этом случае закон дисперсии в виде соотношения между  $q_{\parallel}^2$  и  $q_{\perp}^2$  будет зависеть еще и от угла между направлениями магнитного поля и импульса фотона,  $q_{\parallel}^2 = f^{(2)}(q_{\perp}^2, \theta)$ .

Как нетрудно видеть из рис. 2.1 и 2.2 главы 2, в противоположность чистому магнитному полю, в плазме существует область с  $q^2 > 0$  ниже порога рождения пар с неравенствами, противоположными соотношениям (3.18). Этот факт связан с появлением плазменной частоты в присутствии реальных электронов и позитронов среды. Напомним, что плазменная частота может быть определена из уравнения

$$\omega_p^2 - \varkappa^{(2)}(\omega_p, \mathbf{k} \rightarrow 0) = 0. \quad (3.19)$$

Эти факты приводят к новым правилам отбора по поляризациям: в области  $q^2 > 0$  становится возможным новый канал расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , запрещенный при отсутствии плазмы, тогда как каналы расщепления  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ , разрешенные в чистом магнитном поле, оказываются кинематически закрытыми. В области  $q^2 < 0$  правила отбора по поляризациям остаются такими же, как в замагниченном вакууме. Строго говоря, зависимость закона дисперсии от угла между направлением магнитного поля и импульсом фотона может приводить к дополнительным разрешенным каналам расщепления, например  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  или  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ . Однако численный анализ показывает, что эти переходы запрещены в рассматриваемых условиях.

Отметим здесь еще одно важное обстоятельство: как следует из формулы (2.15) главы 2, собственное значение поляризационного оператора  $\varkappa^{(2)}(q)$  имеет

сингулярность вблизи порога рождения пар:

$$\varkappa^{(2)}(q) \simeq -\frac{2\alpha\beta m}{\sqrt{4m^2 - q_{\parallel}^2}} \operatorname{th} \frac{\omega}{4T}. \quad (3.20)$$

Этот факт приводит к необходимости учета перенормировки волновой функции фотона моды 2:

$$\varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) \sqrt{Z_2}, \quad Z_2^{-1} = 1 - \frac{\partial \varkappa^{(2)}(q)}{\partial \omega^2}. \quad (3.21)$$

Парциальные амплитуды для каналов  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$ ,  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  и  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  могут быть получены из (3.3) подстановкой соответствующих векторов поляризации

$$\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''} = \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(q) \varepsilon_{\rho}^{(\lambda')*}(q') \varepsilon_{\nu}^{(\lambda'')*}(q'') \Pi_{\mu\nu\rho}. \quad (3.22)$$

При этом:

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 12} = -i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(q' \varphi q'')(q' \tilde{\varphi} q'')}{[q_{\perp}^{\prime 2} q_{\parallel}^{\prime \prime 2} q_{\perp}^{\prime \prime 2}]^{1/2}} \mathcal{G}(q''_{\parallel}), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1 \rightarrow 22} &= -i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(q' q'')_{\parallel}}{[q_{\parallel}^{\prime 2} q_{\parallel}^{\prime \prime 2} q_{\perp}^{\prime \prime 2}]^{1/2}} \\ &\times \left\{ (q q'')_{\perp} \mathcal{G}(q'_{\parallel}) + (q q')_{\perp} \mathcal{G}(q''_{\parallel}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 11} = \mathcal{M}_{1 \rightarrow 12}(q \leftrightarrow q''), \quad (3.25)$$

где  $\mathcal{G}(q_{\parallel})$  дается формулой (3.6).

### 3.4. Вероятность расщепления фотона

Для анализа эффективности рассматриваемого процесса и сравнения его с другими конкурирующими реакциями представляет интерес вычислить вероятность поглощения фотона за счет процесса расщепления, которая может быть определена следующим образом:

$$W_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''} = \frac{g_{\lambda' \lambda''}}{32\pi^2 \omega_\lambda} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''}|^2 Z_\lambda Z_{\lambda'} Z_{\lambda''} (1 + f_{\omega'}) (1 + f_{\omega''}) \times \\ \times \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') - \omega_{\lambda''}(\mathbf{k}'')) \frac{d^3 k''}{\omega_{\lambda'} \omega_{\lambda''}}, \quad (3.26)$$

где  $f_\omega = [e^{\omega/T} - 1]^{-1}$  – функция распределения фотонов, фактор  $g_{\lambda' \lambda''} = 1 - (1/2) \delta_{\lambda' \lambda''}$  введен для учета возможной тождественности фотонов в конечном состоянии.

Рассмотрим сначала случай зарядово симметричной плазмы, когда химический потенциал  $\mu = 0$ . Как отмечалось в разделе 3, в этом случае в процессе расщепления участвуют фотоны только двух поляризаций, определяемых векторами (2.20).

### 3.4.1. Каналы $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$ и $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$

В общем случае вероятности (3.26) могут быть получены только численно. Однако в некоторых предельных случаях возможно найти относительно простые выражения для вероятностей расщепления фотона по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ . Как показывает анализ, в случае низких температур ( $T \ll m$ ) и энергий ( $\omega \ll m$ ) модификация амплитуд (3.23) – (3.25) за счет влияния плазмы будет мала по сравнению с соответствующими вкладками от чистого магнитного поля. При этом влияние плазмы на процесс расщепления фотона будет проявляться посредством модификации закона дисперсии фотона моды 2 в законе сохранения энергии. В рассматриваемом пределе удобно пользоваться следующим приближенным законом дисперсии для фотонов этой моды:

$$q_{\parallel}^2 \simeq \omega_p^2 \sin^2 \theta + (1 - \xi) q_{\perp}^2, \quad \omega_p^2 = \frac{4\alpha\pi}{m} n_e. \quad (3.27)$$

Здесь  $n_e$  – концентрация электронов и позитронов в сильно замагниченной, зарядово симметричной низкотемпературной плазме, которая определяется согласно (2.45),  $\theta$  – угол между импульсом фотона  $\mathbf{k}$  и направлением магнитного

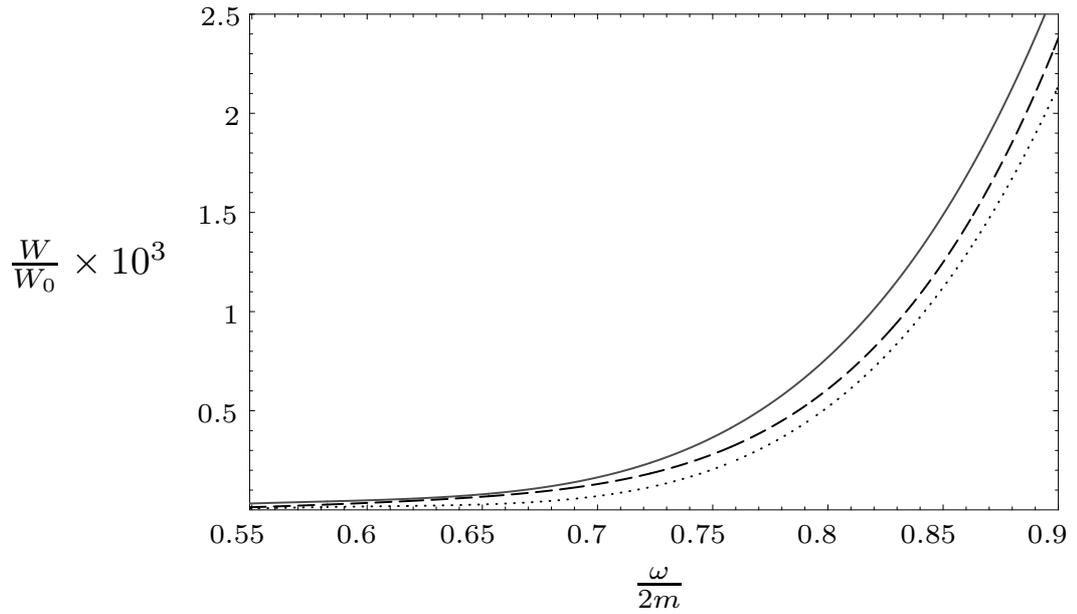


Рис. 3.3. Вероятность расщепления фотона в канале  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  от энергии начального фотона в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 100$ ) при температурах 50 кэВ (сплошная линия) и 250 кэВ (показана пунктиром). Штриховой линией показана вероятность в чистом магнитном поле ( $T = \mu = 0$ ) [81].  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{cm}^{-1}$ ,  $\theta = \pi/2$ .

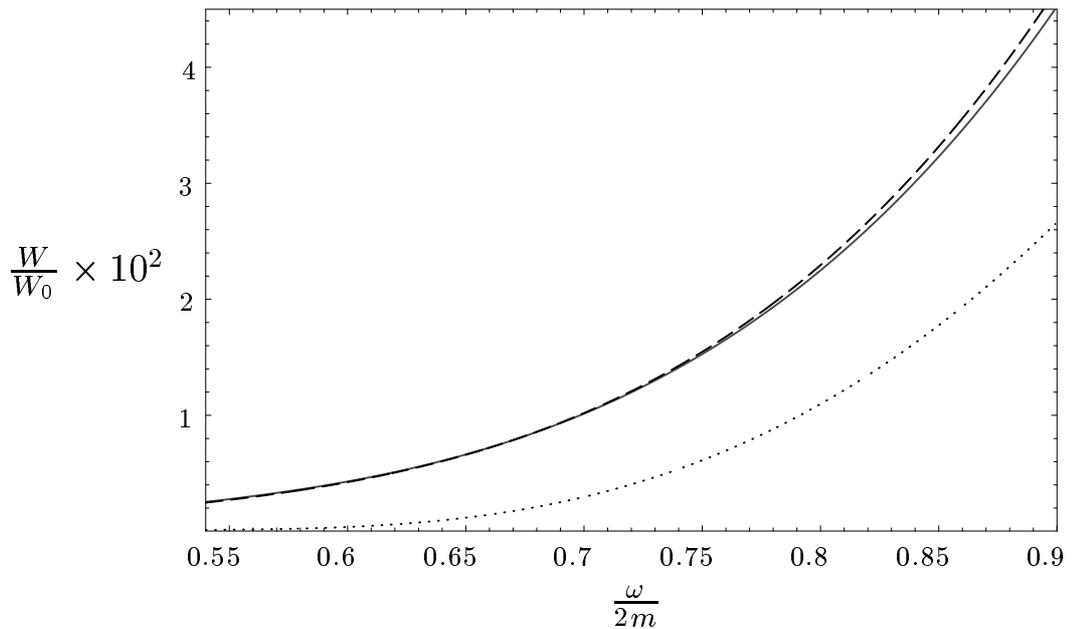


Рис. 3.4. То же, что и на рис. 3.3, для канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ .

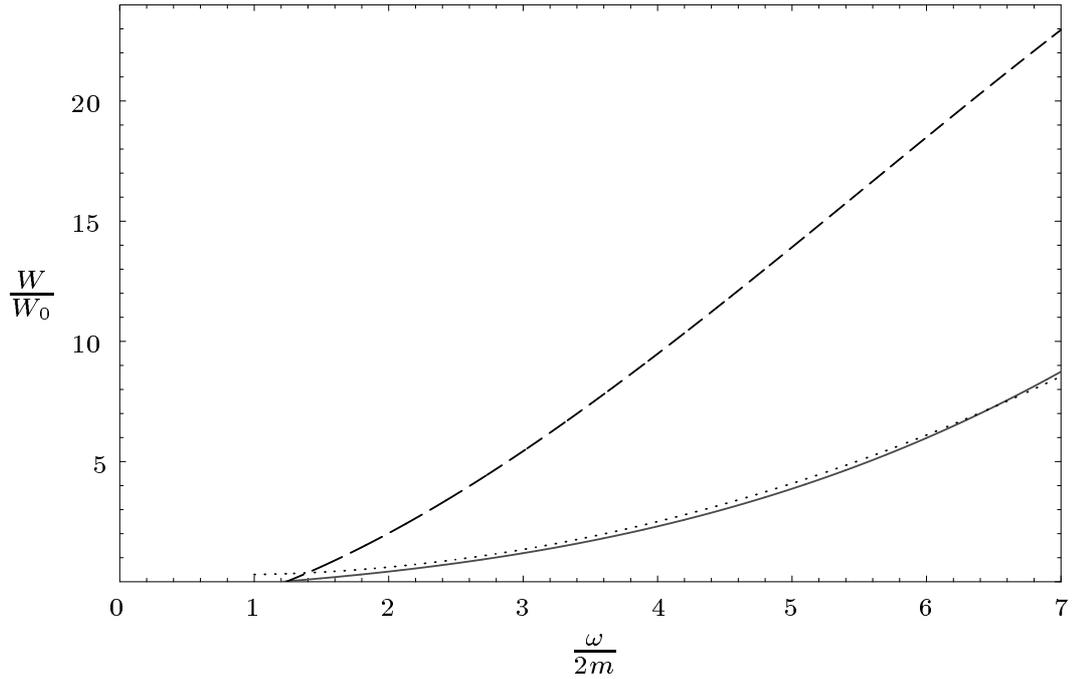


Рис. 3.5. Зависимость вероятности расщепления фотона в канале  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  от энергии начального фотона в сильном магнитном поле  $B/B_e = 200$  и нейтральной ( $T = 1$  МэВ) плазме. Пунктирная линия соответствует вероятности в сильном магнитном поле ( $T = 0$ ) [81]. Асимптотика (3.35) показана точками. Здесь  $\theta = \pi/2$ .

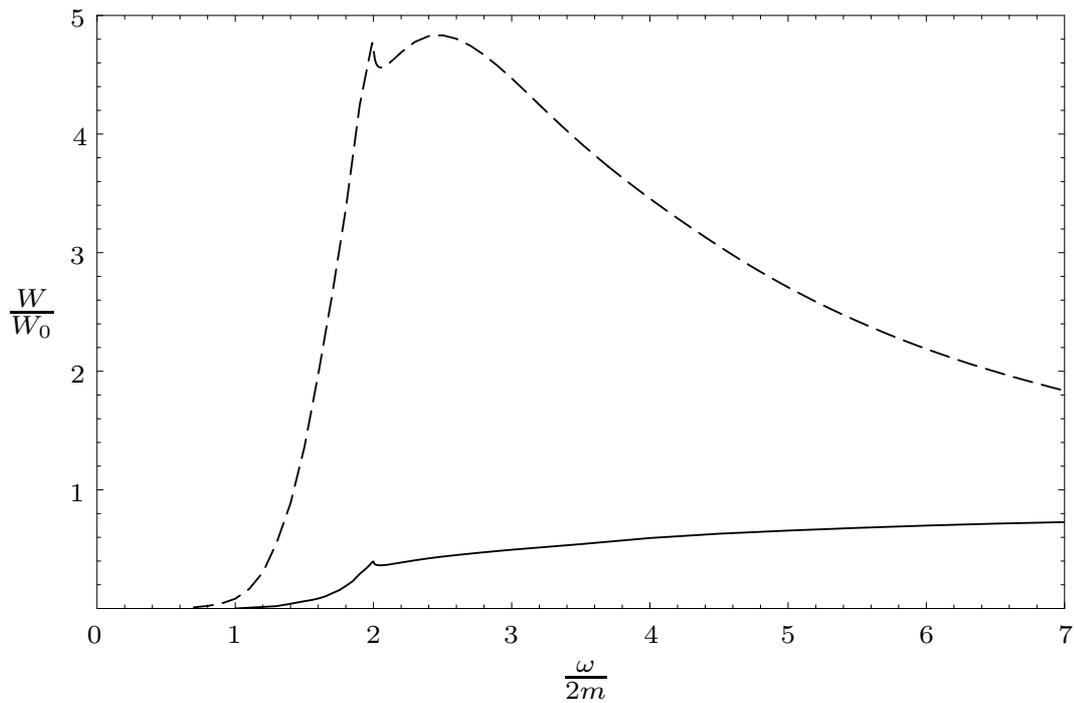


Рис. 3.6. То же, что и на рис. 3.5, для канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ .

поля  $\mathbf{B}$ ,  $\xi = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{B}{B_e}$  – параметр, характеризующий влияние магнитного поля (для полей  $B \lesssim 200B_e$  его можно считать малым).

Используя приближенный закон дисперсии (3.27), получим следующие выражения для вероятностей расщепления фотона в случае низких температур:

$$W_{1 \rightarrow 12} \simeq \frac{\alpha^3 \xi^2 m}{288\pi^2} \left(\frac{T}{m}\right)^5 \mathcal{F}_1\left(\frac{\omega}{T}, \sin \theta\right), \quad (3.28)$$

$$W_{1 \rightarrow 22} \simeq \frac{\alpha^3 m}{72\pi^2} \left(\frac{T}{m}\right)^5 \mathcal{F}_2\left(\frac{\omega}{T}, \sin \theta\right), \quad (3.29)$$

где  $\mathcal{F}_1(y, z)$  и  $\mathcal{F}_2(y, z)$  обозначают интегралы:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(y, z) &= \frac{1}{y^2 z} \int_{\delta}^{yz} \frac{dx}{x^2} \frac{[x^2 - \delta^2]^4}{[1 - \exp(-x)]} \times \\ &\times \frac{1}{[1 - \exp(x - y)(1 - \frac{\xi}{2y}(x^2 - \delta^2))]}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(y, z) &= z \Theta(yz - 2\delta) \int_{\delta}^{\lambda(y, z)} dx \frac{[x(yz - x) - \delta^2]^2}{[1 - \exp(-x)]} \times \\ &\times \frac{1}{[1 - \exp(x - y)(1 - \frac{\xi}{2y}(x^2 - \delta^2))]} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь

$$\lambda(y, z) = \frac{yz}{2} + \sqrt{\frac{y^2 z^2}{4} - \delta^2}$$

и  $\delta \equiv (\omega_p/T)\xi^{-1/2}$ ;  $\Theta(x)$  – тэта-функция. Заметим, что в пределе  $T \rightarrow 0$  мы сразу получаем выражения для вероятностей расщепления фотона в сильно замагниченном вакууме:

$$W_{1 \rightarrow 12} \simeq \frac{\alpha^3 \xi^2 m}{2016\pi^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^5 \sin^6 \theta, \quad (3.32)$$

$$W_{1 \rightarrow 22} \simeq \frac{\alpha^3 m}{2160\pi^2} \left(\frac{\omega}{m}\right)^5 \sin^6 \theta, \quad (3.33)$$

Выражение (3.33) может быть легко получено из результатов работ [78, 79] (см., например, также [12], [175]). Насколько нам известно, выражение для вероятности расщепления фотона для канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  в пределе низких энергий ранее не встречалось в литературе.

Сравнение вероятностей расщепления фотона в сильно замагниченной плазме (3.28), (3.29) и в чистом магнитном поле (3.32), (3.33) показывает, что электрон-позитронный фон и термальные фотоны противоположным образом влияют на процесс при рассматриваемых параметрах. С одной стороны, присутствие  $e^+e^-$  плазмы приводит к подавлению амплитуды и фазового пространства реакции. С другой стороны, усиление вероятности расщепления фотона обуславливается стимулирующим эффектом за счет функций распределения фотонов в конечном состоянии. Из анализа полученных результатов (3.28), (3.29) следует, что в пределе низких температур и низких энергий фотонов влияние плазмы также приводит к усилению вероятности расщепления по сравнению со случаем замагниченного вакуума, за счет увеличения числа возможных состояний конечных фотонов в силу наличия статистических факторов. Этот вывод остается справедливым и для более широкого масштаба энергий (сплошные линии на рис. 3.3 и рис. 3.4). Однако численный анализ показывает, что в области  $\omega \sin \theta \leq 2m$  вероятность уменьшается с ростом температуры и становится даже меньше, чем в чистом магнитном поле (см. кривые, обозначенные точками на рис. 3.3 и рис. 3.4).

Полученные результаты показывают, что вероятность  $W_{1 \rightarrow 12}$  значительно подавлена по сравнению с  $W_{1 \rightarrow 22}$ . Основным аргументом, объясняющим этот факт, точно такой же, как в магнитном поле без плазмы и состоит в следующем: в области энергий  $\omega \sin \theta \leq 2m$  рассматриваемые каналы закрываются коллинеарностью кинематики. Строго говоря, эта кинематика зависит от величины параметра  $\xi$ . И в представлении очень сильного магнитного поля, когда  $\xi \gtrsim 1$  ( $B \gtrsim 10^3 B_e$ ), кинематика расщепления фотона будет значительно отклоняться от коллинеарной даже при  $\omega \ll m$ . В этом случае легко показать,

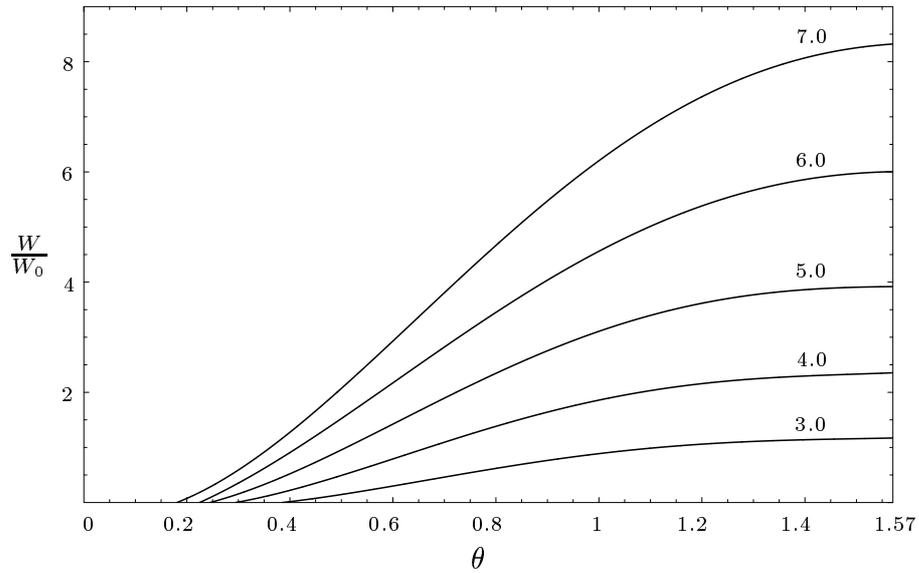


Рис. 3.7. Зависимость вероятности расщепления для канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при различных энергиях начального фотона ( $B/B_e = 200, T = 1\text{МэВ}$ ). Числа на кривых соответствуют величине отношения  $\omega/2m$ .

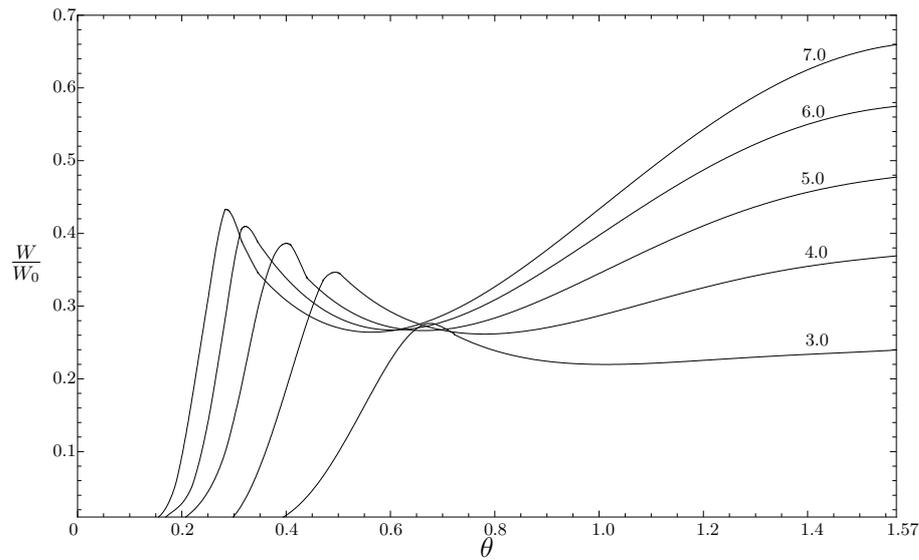


Рис. 3.8. То же, что и на рис. 3.7, для канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ .

что, в отличие от канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$ , амплитуда  $\mathcal{M}_{112}$  (3.23) содержит член  $(q'\varphi q'') \sim (q'\tilde{\varphi}q'') \sim \Delta\phi$ , где  $\Delta\phi$  – угловое расстояние между двумя фотонами в конечном состоянии. При низких энергиях фотонов  $\Delta\phi \sim \sqrt{\xi} \sin\theta$ , и коэффициент поглощения  $W_{1\rightarrow 12}$  подавлен фактором  $\xi^2 \sin^2\theta \ll 1$  по сравнению с  $W_{1\rightarrow 22}$ .

Ситуация меняется драматически в случае, когда энергия начального фотона становится больше, чем  $2m/\sin\theta$ . Для понимания этого факта рассмотрим предел  $m^2 \ll \omega^2 \sin^2\theta \leq \beta$ . Анализ показывает, что в этом случае основной вклад в вероятности процессов происходит от кинематической области в непосредственной близости от порога рождения  $e^+e^-$  пары фотоном моды 2, поскольку амплитуды (3.23) и (3.24) имеют корневую особенность в этой области. Как следствие, соответствующие коэффициенты поглощения могут содержать полюсную сингулярность. Однако учет перенормировки волновых функций фотонов исправляет эту ситуацию. Действительно, в пределе  $q_{\parallel}^2 \rightarrow 4m^2$  можно показать, что произведение сингулярной функции  $\mathcal{G}(q_{\parallel})$  в амплитудах (3.23), (3.24) на квадратный корень перенормировочного коэффициента  $Z_2$  является регулярной функцией:

$$\mathcal{G}(q_{\parallel})\sqrt{Z_2} \simeq \frac{\sqrt{2\pi}m}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \operatorname{th} \frac{\omega}{4T}.$$

Заметим, что в этой области закон дисперсии фотона моды 2 значительно упрощается и может быть найден исходя из соотношения:

$$\sqrt{1 - \frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}} \simeq \alpha \frac{\beta}{q_{\perp}^2} \operatorname{th} \frac{\omega}{4T} \quad (3.34)$$

С учетом этих фактов, получим следующие приближенные выражения для коэффициентов поглощения фотона:

$$\begin{aligned} W_{1\rightarrow 12} &\simeq \frac{\alpha^3 T^2}{4\omega \sin^2\theta} \times \\ &\times \left[ (1 - \cos\theta)^2 \mathcal{F}_3 \left( \frac{\omega(1 + \cos\theta)}{2T} \right) + (\cos\theta \rightarrow -\cos\theta) \right], \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 22} &\simeq \frac{\alpha^3 m^2}{4\omega} \frac{1}{1 - \exp\left[-\frac{\omega}{T}(1 - \cos\theta)\right]} \times \\
&\times \frac{1}{1 - \exp\left[-\frac{\omega}{T}(1 + \cos\theta)\right]} \times \\
&\times \left\{ \text{th}^2\left[\frac{\omega}{8T}(1 - \cos\theta)\right] + (\cos\theta \rightarrow -\cos\theta) \right\},
\end{aligned} \tag{3.36}$$

где

$$\mathcal{F}_3(z) = \int_0^z \frac{x \text{th}^2(x/4) dx}{[1 - \exp(-x)][1 - \exp(x - \omega/T)]}. \tag{3.37}$$

Отметим, что в пределе  $T \rightarrow 0$  эти формулы переходят в соответствующие выражения для вероятностей расщепления фотона в сильном магнитном поле в отсутствие плазмы:

$$W_{1 \rightarrow 12} \simeq \frac{\alpha^3 \omega \sin^2 \theta}{16}, \tag{3.38}$$

$$W_{1 \rightarrow 22} \simeq \frac{\alpha^3 m^2}{2\omega}, \tag{3.39}$$

которые можно получить из результатов работ [81, 82]. Из выражений (3.38) и (3.39) следует, что при больших энергиях фотонов коэффициент поглощения для канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  доминирует над  $W_{1 \rightarrow 22}$ . Анализ приближений (3.35), (3.36) и непосредственный численный расчет (см. рис. 3.5 и 3.6) показывают, что соотношения между вероятностями рассматриваемых каналов остаются такими же в присутствии плазмы. Кроме того, нетрудно видеть, что темп расщепления фотона в плазме уменьшается по сравнению с результатом для чистого магнитного поля для больших энергий расщепляющегося фотона.

В дополнение к энергетической зависимости вероятности расщепления фотона интересно также рассмотреть зависимость вероятности от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля. Учет угловой зависимости может быть важен, например, в задаче переноса излучения в сильно замагниченной плазме (см. раздел 3.5). Соответствующие результаты для

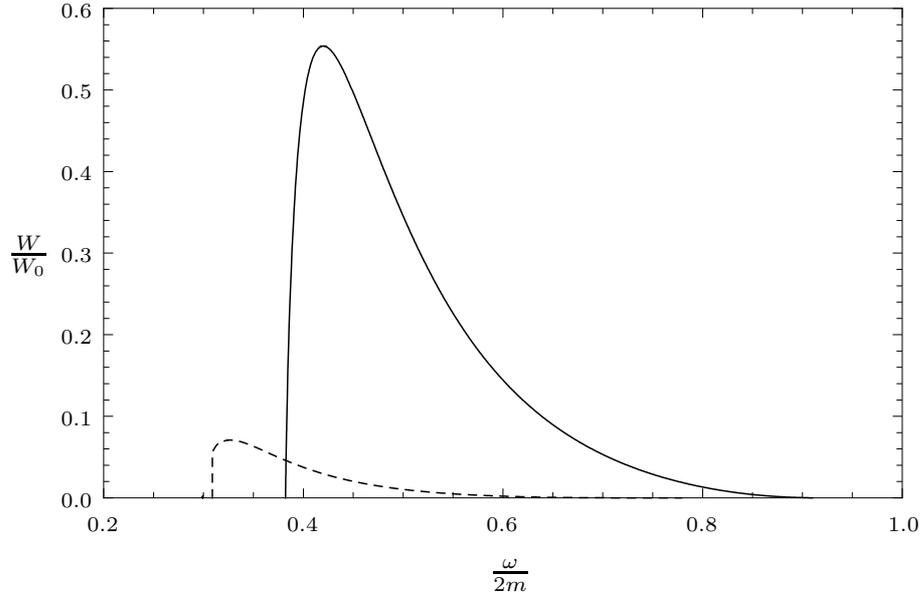


Рис. 3.9. Вероятность расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) при температуре 1 МэВ (сплошная линия) и 500 кэВ (штриховая линия). Здесь  $\theta = \pi/2$ .

различных энергий начального фотона представлены на рис. 3.7 и 3.8. Интересно заметить, что вероятность канала  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  имеет максимум при  $\theta = \pi/2$ , тогда как  $W_{1 \rightarrow 22}$  может иметь максимум при  $\theta < \pi/2$  для рассматриваемой области энергий начального фотона.

### 3.4.2. Канал $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$

Как было показано в разделе 3.3, в присутствии сильно замагниченной плазмы кинематически открывается «новый» канал расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , запрещенный в чистом магнитном поле. Согласно (3.25) и (3.26), коэффициент поглощения фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  может быть представлен в виде

$$W_{2 \rightarrow 11} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2} Z_2 \mathcal{G}^2(q_{\parallel}) \frac{q_{\perp}^2}{\omega} \mathcal{F}_4 \left( \sqrt{\frac{q_{\parallel}^2}{q_{\perp}^2}} \right) \Theta(q^2), \quad (3.40)$$

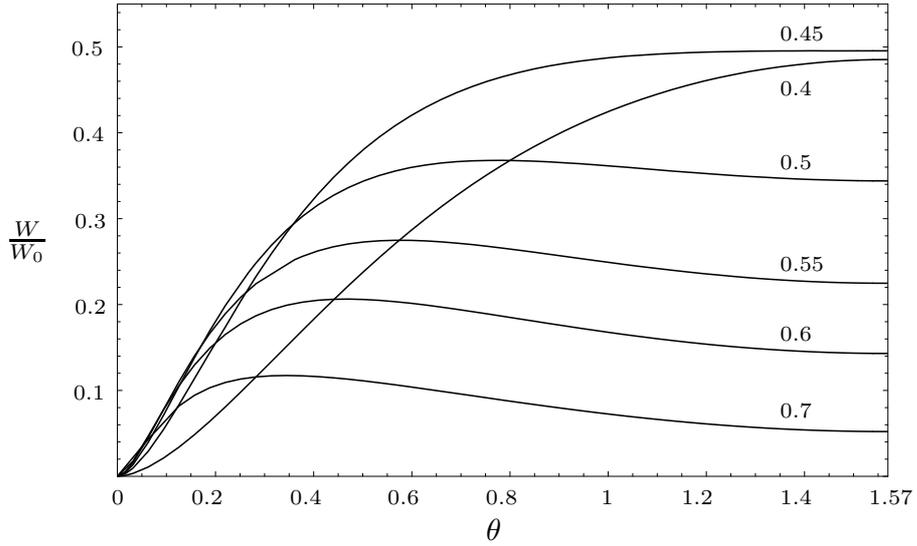


Рис. 3.10. Зависимость вероятности расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при различных энергиях начального фотона ( $B/B_e = 200, T = 1$  МэВ). Числа на кривых соответствуют отношению  $\omega/2m$ .

где

$$\mathcal{F}_4(z) = \frac{4z^3}{\pi} \int_{1-z}^{1+z} dx \int_0^{y_0} dy \frac{y^2 \sqrt{y_0^2 - y^2}}{(x^2 + z^2 y^2)[(2-x)^2 + z^2 y^2]} \times$$

$$\times \left\{ (1 + f_{\omega_+})(1 + f_{\omega - \omega_+}) + (\omega_+ \rightarrow \omega_-) \right\}, \quad (3.41)$$

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2z^2} \left[ \omega(z^2 - 1 + x) \pm q_z z^2 \sqrt{y_0^2 - y^2} \right],$$

$$y_0 = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z^2} \sqrt{z^2 - (1-x)^2}, \quad z = \sqrt{\frac{q_{\parallel}^2}{q_{\perp}^2}}.$$

Если можно пренебречь влиянием стимулирующего излучения конечных фотонов ( $f_{\omega'} = f_{\omega''} = 0$ ), выражение для функции  $\mathcal{F}_4(z)$  сильно упрощается:

$$\mathcal{F}_4(z) = 2 \ln z - 1 + z^{-2}. \quad (3.42)$$

На рис. 3.9 коэффициент поглощения фотона для канала  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  как функция энергии начального фотона представлен для случая, когда фотон распространяется поперек направления магнитного поля при температурах 1 МэВ и 500 кэВ. Видно, что, в противоположность каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$ ,

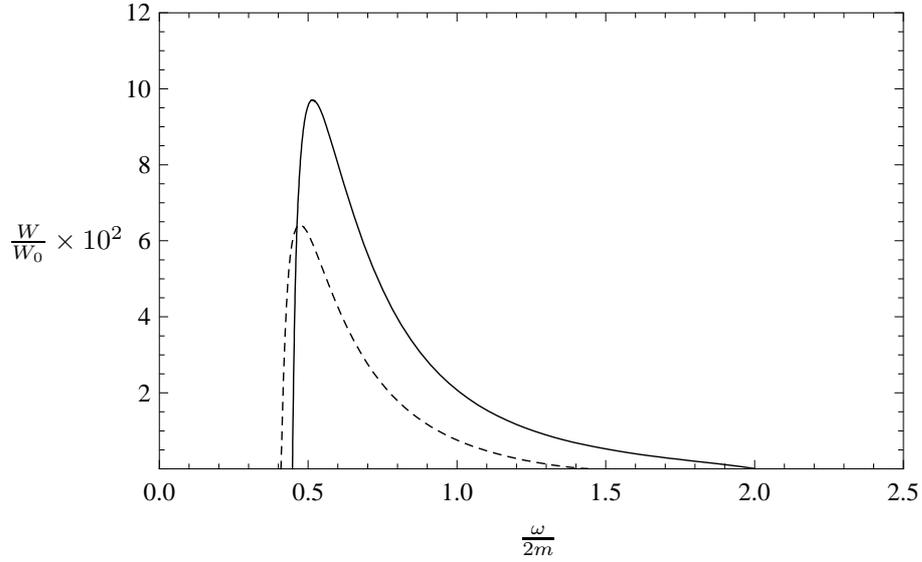


Рис. 3.11. Вероятность расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) и холодной ( $T = 50$  кэВ) плазме при химическом потенциале 1 МэВ (сплошная линия) и 0.75 МэВ (штриховая линия). Здесь  $\theta = \pi/2$ .

вероятность «нового» канала расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  быстро падает с понижением температуры. Это обусловлено уменьшением кинематически разрешенной области ( $q^2 > 0$ ) для рассматриваемого канала, что приводит к уменьшению фазового объема реакции с уменьшением температуры.

Зависимость вероятности канала расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при температуре 1 МэВ представлена на рис. 3.10. Заметим, что в области  $\pi/4 \lesssim \theta \lesssim \pi/2$   $W_{2 \rightarrow 11}$  очень слабо зависит от угла.

### 3.4.3. Зарядово несимметричная плотная плазма

Исследование процесса расщепления фотона не будет считаться полным без рассмотрения другой предельной ситуации – зарядово несимметричной плазмы. В общем случае такая задача будет очень громоздкой из-за наличия трех поляризационных состояний фотона. Однако в пределе холодной плазмы,  $T \ll \mu - m$ , в расщеплении будут участвовать в основном фотоны с энергиями  $\omega \sim T$ . В таких условиях основным будет «новый» канал расщепления,  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ .

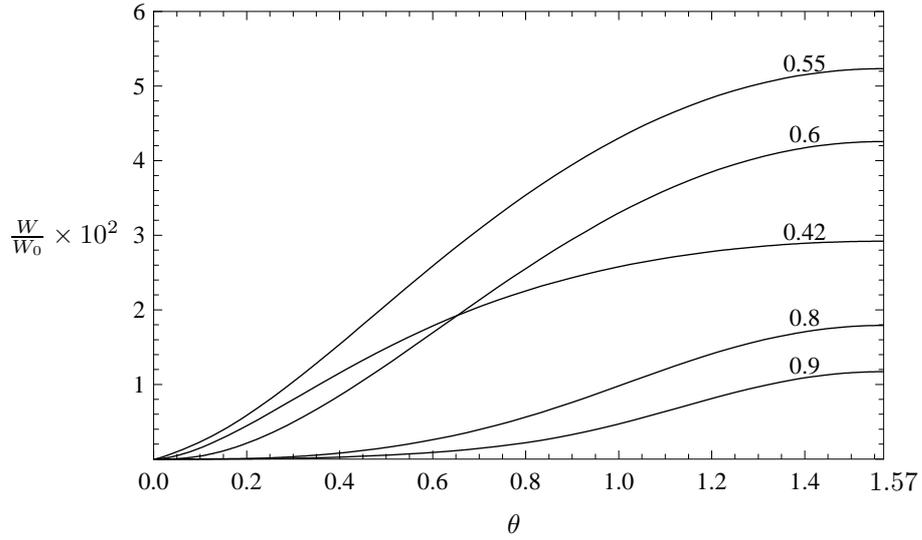


Рис. 3.12. Зависимость вероятности расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при различных энергиях начального фотона ( $B/B_e = 200$ ,  $T = 50$  кэВ,  $\mu = 0.75$  МэВ). Числа на кривых соответствуют отношению  $\omega/2m$ .

Нетрудно видеть, что вероятность расщепления фотона по этому каналу будет определяться теми же формулами (3.40) и (3.41), что и для зарядово симметричной плазмы, но уже с учетом дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов, определяемых из (2.7) и (2.25). На рис. 3.11 вероятность поглощения фотона для канала  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , как функция энергии начального фотона представлена для случая, когда фотон распространяется поперек направления магнитного поля при двух значениях химического потенциала 1 МэВ и 0.75 МэВ. Как видно из рис. 3.11, вероятность «нового» канала расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  быстро падает с понижением химического потенциала. Это обусловлено уменьшением кинематически разрешенной области ( $q^2 > 0$ ) для рассматриваемого канала, что приводит к уменьшению фазового объема реакции с уменьшением  $\mu$ .

Зависимость вероятности поглощения фотона по каналу расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при химическом потенциале 0.75 МэВ представлена на рис. 3.12.

Интересно отметить, что качественное поведение вероятности в случае хо-

лодной, почти вырожденной плазмы оказывается аналогичным случаю горячей зарядово симметричной плазмы, рассмотренному в разделе 3.4.2. Этот факт, скорее всего, обусловлен тем, что в области  $q^2 > 0$  законы дисперсии фотона в случае  $T \ll \mu - m$  и  $\mu = 0$  качественно совпадают, тогда как количественный результат определяется в основном величиной фазового объема реакции.

#### 3.4.4. Слияние фотонов

Вследствие конечной плотности фотонов в электрон-позитронной плазме, например, в задаче переноса излучения [12] необходимо также учитывать обратный процесс слияния фотонов  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$ . При этом мы можем определить коэффициент поглощения для рассматриваемой реакции аналогично соответствующему коэффициенту для расщепления фотона:

$$W_{\lambda\lambda' \rightarrow \lambda''} = \frac{1}{32\pi^2\omega_\lambda} \int |\mathcal{M}_{\lambda\lambda' \rightarrow \lambda''}|^2 Z_\lambda Z_{\lambda'} Z_{\lambda''} f_{\omega'} (1 + f_{\omega''}) \times \\ \times \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) + \omega_{\lambda'}(\mathbf{k} + \mathbf{k}'') - \omega_{\lambda''}(\mathbf{k}'')) \frac{d^3 k''}{\omega_{\lambda'} \omega_{\lambda''}}, \quad (3.43)$$

где амплитуды  $\mathcal{M}_{\lambda\lambda' \rightarrow \lambda''}$  могут быть получены из (3.23) – (3.25) с использованием кроссинг симметрии. Был проведен численный анализ коэффициентов поглощения в реакции слияния фотонов для кинематически допустимых каналов для случая, когда начальный фотон распространяется поперек направления магнитного поля. Результаты представлены на рис. 3.13 и 3.14. Как можно видеть из этих рисунков, вклад канала  $\gamma_1\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$  в коэффициент поглощения пренебрежимо мал в случае низких температур, однако он будет доминировать в более горячей плазме (см. рис. 3.14). С другой стороны, канал  $\gamma_2\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$ , определяющий лидирующий вклад в коэффициент поглощения при температуре  $T = 50$  кэВ, кинематически подавлен при более высоких температурах. При этом в горячей плазме, в области  $\omega \lesssim 2m$  подавляются также каналы расщепления фотона. Интересно отметить, что коэффициент поглощения канала  $W_{21 \rightarrow 1}$  имеет резонансное усиление в непосредственной близости от порога рождения

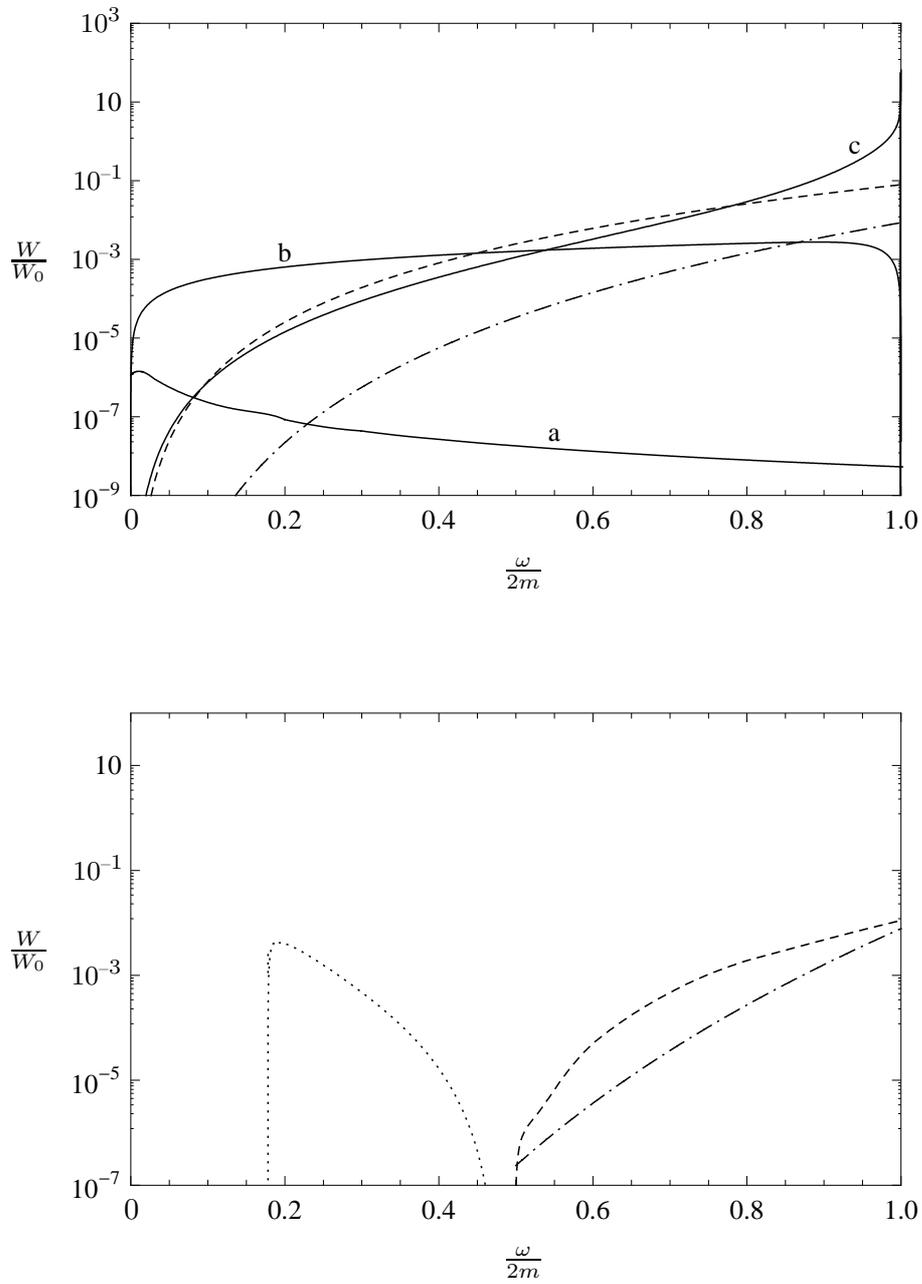


Рис. 3.13. Зависимость коэффициента поглощения фотона в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) при значениях температуры 50 кэВ (верхний рисунок) и 250 кэВ (нижний рисунок) для каналов  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  (точки),  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  (пунктирная линия),  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  (штрихпунктирная линия),  $\gamma_1\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$  (a),  $\gamma_2\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$  (b),  $\gamma_2\gamma_1 \rightarrow \gamma_1$  (c) от энергии начального фотона. Здесь  $\theta = \pi/2$ .

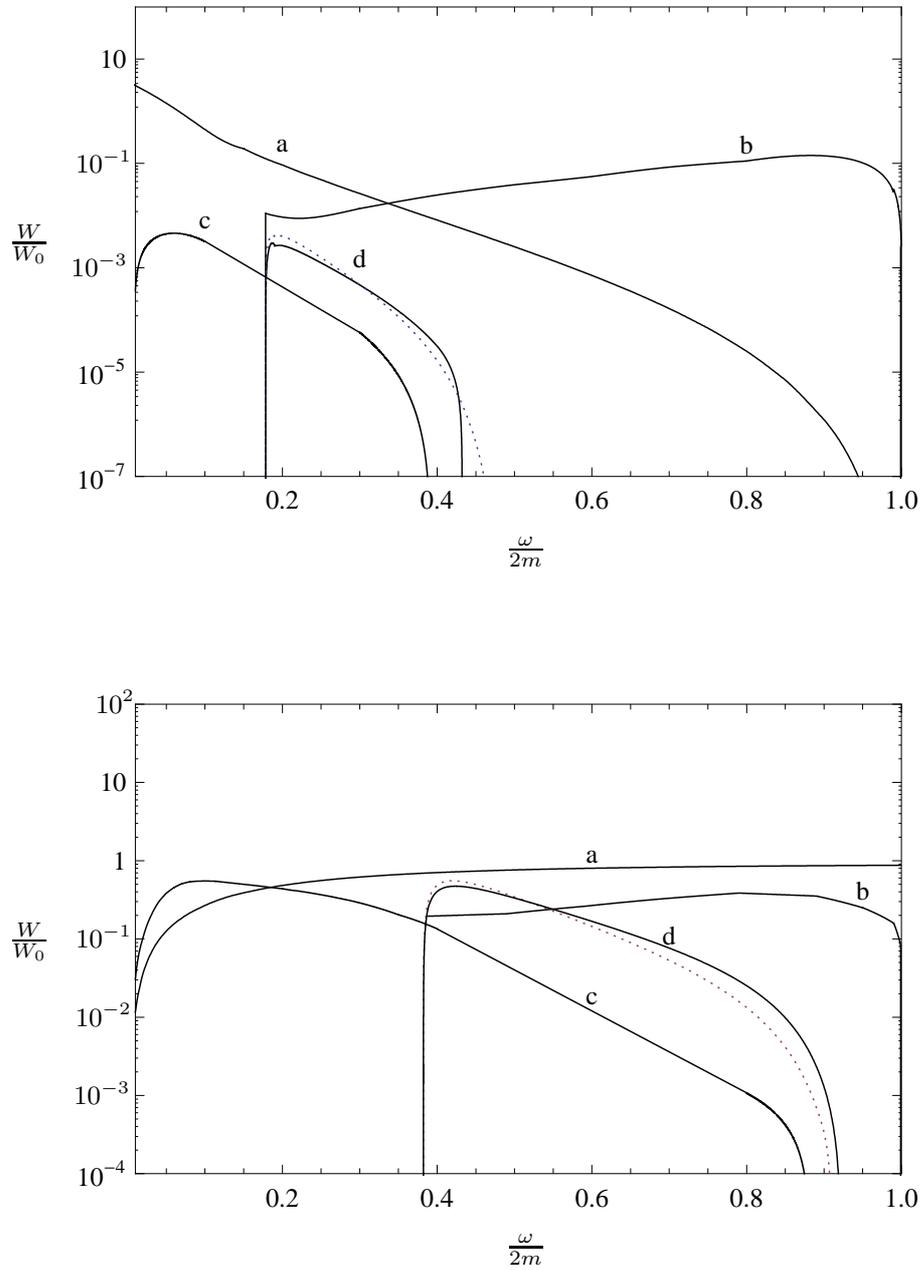


Рис. 3.14. Зависимость коэффициента поглощения фотона в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) при значениях температуры 250 кэВ (верхний рисунок) и 1 МэВ (нижний рисунок) для каналов  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  (точки),  $\gamma_1 \gamma_2 \rightarrow \gamma_1$  (a),  $\gamma_2 \gamma_2 \rightarrow \gamma_1$  (b),  $\gamma_1 \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$  (c),  $\gamma_2 \gamma_1 \rightarrow \gamma_1$  (d) от энергии начального фотона. Здесь  $\theta = \pi/2$ .

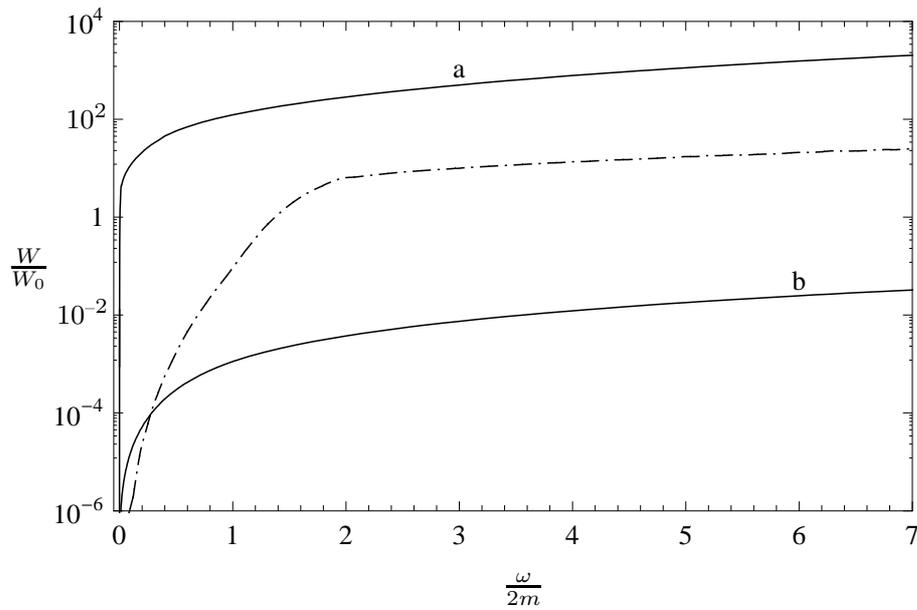


Рис. 3.15. Зависимость полной вероятности поглощения фотона  $W_{1 \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2}$  от энергии начального фотона в сильном магнитном поле  $B/B_e = 200$  при  $T = 1$  МэВ (a) и  $T = 50$  кэВ (b). Штрихпунктирная линия соответствует полной вероятности расщепления фотона  $W_{1 \rightarrow 12} + W_{1 \rightarrow 22}$  при  $T = 50$  кэВ. Здесь  $\theta = \pi/2$ .

пары,  $\omega \simeq 2m$ .

Мы видим теперь, что в присутствии горячей плазмы только процесс слияния фотонов может быть достаточно эффективным механизмом уменьшения числа частиц, тогда как при относительно низких температурах ( $T \simeq 50$  кэВ) как процесс расщепления, так и реакция слияния будут играть главную роль в изменении числа фотонов.

### 3.5. Обсуждение

В моделях источников мягких повторяющихся гамма-всплесков зависимость коэффициента поглощения фотона от энергии и температуры играет очень важную роль. Он оказывает влияние на форму результирующего спектра и определяет профиль температуры в области излучения в течение вспышек SGR [12, 13, 90].

Предыдущие исследования проблемы переноса излучения в сильно замагниченной плазме показали, что, наряду с процессом комптоновского рассеяния,

реакция расщепления фотона  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  может играть важную роль, как механизм изменения числа фотонов [12, 13]. В разделе 3.4.2 было показано, что при температуре  $T \sim t$  в кинематической области  $\omega \leq 2t$  основным каналом расщепления будет процесс  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , запрещенный в чистом магнитном поле. Однако сравнение рис. 3.9 и рис. 2.9 главы 2 показывает, что вероятность этого процесса будет много меньше, чем скорость комптоновского рассеяния  $W_{2 \rightarrow 1} + W_{2 \rightarrow 2}$ . Тем не менее, реакция расщепления может оставаться достаточно эффективным механизмом рождения фотонов при рассматриваемой температуре.

Полная вероятность расщепления по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  растёт с уменьшением температуры и становится сравнимой и даже начинает превосходить суммарный коэффициент поглощения в комптоновском процессе  $W_{1 \rightarrow 1} + W_{1 \rightarrow 2}$ . Как видно из рис. 3.15 (см. также рис. 2.7 главы 2), процесс расщепления фотона (штрихпунктирная линия) сильно доминирует над реакцией комптоновского рассеяния при  $T = 50$  кэВ.

Ранее считалось, что влияние сильно замагниченной холодной плазмы на расщепление фотона несущественно, и в большинстве расчетов можно использовать вакуумное приближение [153, 181]. Наш анализ показывает, что в присутствии горячей плазмы процесс расщепления фотона может быть не только интенсивным источником фотонов, но также эффективным механизмом их поглощения.

Проиллюстрируем этот факт в рамках магнитарной модели вспышечной активности SGR. Известно, что перенос излучения в плазме, удерживаемой магнитным полем, может быть описан как диффузия фотонов моды 1, тогда как фотоны моды 2 оказываются заперты в плазме [12, 13, 90]. Последнее обстоятельство непосредственно связано со слабой зависимостью коэффициента поглощения моды 2 от энергии фотона (см. рис. 3.15). В рассматриваемых условиях и в приближении плоско-параллельной геометрии, когда градиент температуры и магнитное поле направлены вдоль оси  $z$ , мы можем приближенно описать

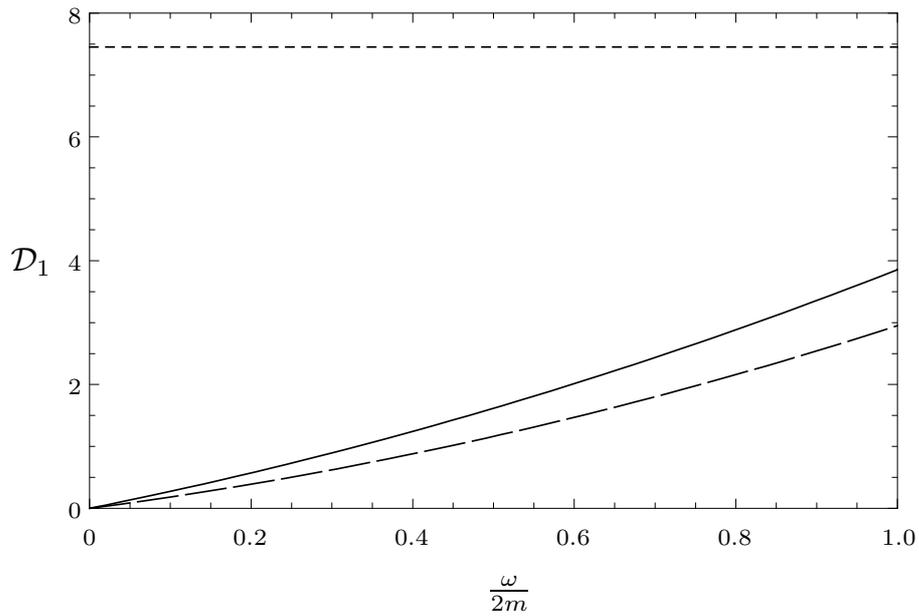


Рис. 3.16. Коэффициент диффузии  $\mathcal{D}_1 = \omega^2 W_0 D_1 / (2m)^2$ , где  $D_1$  определяется из (3.45), как функция отношения  $\omega/2m$  при  $T = 1$  МэВ и  $B = 200B_e$ . Сплошная и штриховая линии соответствуют коэффициенту диффузии с учетом и без учета дисперсии и перенормировки волновой функции фотона. Короткими штрихами обозначено приближение (3.47).

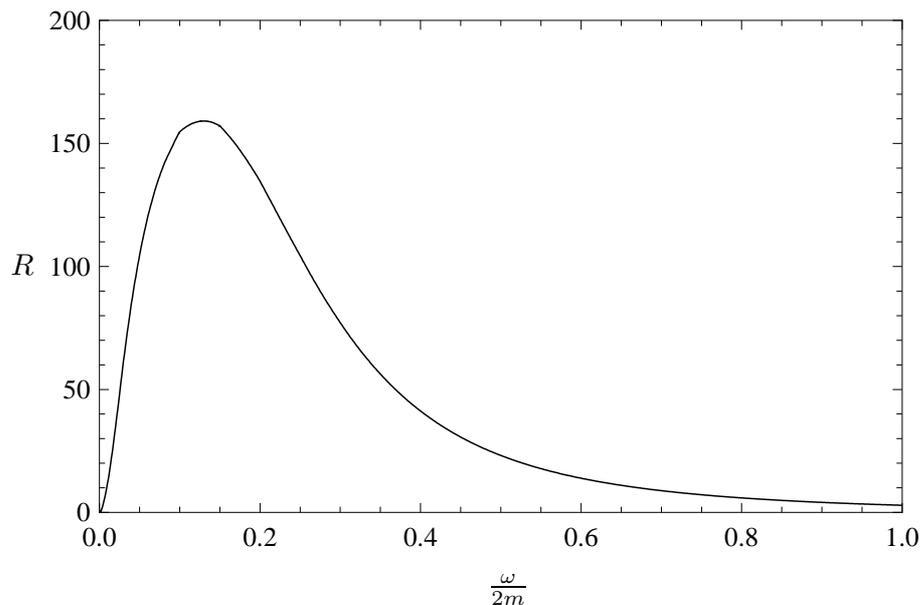


Рис. 3.17. Отношение  $R = \ell_1 / \ell_1^H$  как функция энергии фотона при  $B = 200B_e$ .

перенос излучения следующим уравнением диффузии (см., например, [190]):

$$\frac{\partial n_\lambda^\omega}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left( D_\lambda \frac{\partial n_\lambda^\omega}{\partial z} \right) = Q_\lambda^\omega, \quad (3.44)$$

где  $n_\lambda^\omega$  – концентрация фотонов для мод  $\lambda = 1, 2$ ,  $Q_\lambda^\omega$  – мощность источника фотонов поляризации  $\lambda$ ,

$$D_\lambda(\omega, z) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \ell_\lambda(\theta, \omega, z) \cos^2 \theta \quad (3.45)$$

– коэффициент диффузии, причем  $D_1 \gg D_2$ ,

$$\ell_\lambda = \left[ \sum_{\lambda'=1}^2 W_{\lambda \rightarrow \lambda'} + \sum_{\lambda', \lambda''=1}^2 (W_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''} + W_{\lambda \lambda' \rightarrow \lambda''}) \right]^{-1} \quad (3.46)$$

– длина свободного пробега фотона моды  $\lambda$ .

Заметим, что в магнитарной модели вспышки SGR [12, 13] для анализа переноса излучения использовалось приближенное сечение комптоновского рассеяния (2.46) и (2.47). В этом случае длина свободного пробега фотона моды 1 может быть записана следующим образом

$$\ell_1^H = 3D_1 \simeq \frac{1}{n_e \sigma_T} \left( \frac{m}{\omega} \right)^2 \left( \frac{B}{B_e} \right)^2. \quad (3.47)$$

На рис. 3.16 продемонстрирована важность учета дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов в задаче переноса излучения. Исходя из результатов, представленных в главе 2 (рис. 2.6 – 2.9), в горячей плазме  $T \sim m$  комптоновское рассеяние дает основной вклад в длину свободного пробега фотона и, как следствие, в коэффициент диффузии. Как можно видеть, дисперсия и перенормировка волновой функции фотона становится важной при энергии начального фотона  $\omega \gtrsim m$  (ср. сплошную и штриховую линии на рис. 3.15). Стоит также заметить, что приближение (3.47) вообще не применимо к горячей плазме (штриховая линия).

Для демонстрации того, что расщепление фотона можно рассматривать не только как источник фотонов, но также как эффективный механизм поглощения, мы представили отношение длины свободного пробега фотона моды 1 (3.46) и приближения (3.47),  $R = \ell_1/\ell_1^H$ , при  $T = 50$  кэВ и  $\theta = \pi/2$  (рис. 3.17). Нетрудно видеть, что учет вклада расщепления фотона приводит к существенному увеличению длины свободного пробега фотона моды 1 по сравнению с общепринятым приближением (3.47) в широком диапазоне энергий фотона.

Решение уравнения диффузии (3.44) представляет собой отдельную задачу и выходит за рамки настоящей диссертации. Однако мы можем отметить, что детальный анализ переноса излучения требует аккуратного решения уравнения Больцмана для функции распределения фотонов и уравнения переноса излучения в широком диапазоне температур ( $10 \text{ кэВ} \lesssim T \lesssim 1 \text{ МэВ}$ ).

## Фотон-нейтринные процессы в плотной замагниченной среде

### 4.1. Введение

В данной главе рассматривается еще одно проявление влияния внешней активной среды (сильного магнитного поля и очень плотной плазмы) применительно к процессам, где в конечном состоянии присутствует нейтрино - антинейтринная пара. С одной стороны, такие условия могут реализовываться внутри изолированных нейтронных звезд – магнитаров на различных стадиях их эволюции. С другой стороны, все известные теоретические модели внутреннего строения нейтронных звезд дают такие значения параметров среды, при которых замагниченная плазма является прозрачной для нейтрино. В частности, это утверждение заведомо справедливо в области внешней коры протонейтронной звезды (т.е. звезды, возраст которой не превышает  $10^2$  лет с момента коллапса ядра сверхновой) при умеренно больших значениях плотности и температуры ( $T \lesssim 2$  МэВ,  $\rho \lesssim 10^{11}$  г/см<sup>3</sup> [17, 191, 192]). Следовательно, определяющую роль в нейтринном охлаждении таких объектов будут играть именно процессы, в которых нейтрино-антинейтринная пара находится в конечном состоянии. Наибольший интерес среди таких реакций представляют аннигиляция электрон-позитронных пар,  $e^+e^- \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , фотонейтринный процесс,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , конверсия фотона в пару нейтрино-антинейтрино,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , а также процесс двухфотонной аннигиляции,  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . Древесный процесс с участием  $e^+e^-$  пары при различных физических условиях достаточно подробно рассматривался в литературе [17, 193–195]. Другой древесный процесс,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , детально исследовался в плазме без магнитного поля в работе [196]. В недавних работах [151, 197, 198] этот же процесс рассматривался в присутствии сильно замаг-

ниченной плазмы. Были получены выражения для нейтринной излучательной способности (neutrino emissivity), т.е. энергии, уносимой нейтрино из единицы объема звезды за единицу времени как в случае нерелятивистской, так и в случае релятивистской плазмы. Однако в этих работах, в выражениях для нейтринной светимости за счет комптоноподобного процесса,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , в области нерелятивистской и релятивистской плазмы содержится ряд неточностей.

Двухвершинный петлевой процесс  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  ранее рассматривался в двух предельных случаях сильного магнитного поля без плазмы [22] и в слабо замагниченной плазме (так называемый распад плазмона) [131]. Однако детальный анализ и фотонейтринного процесса и процесса конверсии фотона в сильно замагниченной плазме не проводился. Еще один механизм нейтринного охлаждения, который может представлять интерес – трехвершинный петлевой процесс  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . Как было отмечено в разделе 3.2 главы 3, в случае зарядово несимметричной плазмы ( $\mu \neq 0$ ) амплитуда этого процесса будет пропорциональна величине магнитного поля, которое является дополнительным катализирующим фактором.

В настоящей главе рассматриваются процессы нейтринного охлаждения  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  в приложении к физике магнитаров в присутствии сильно замагниченной плазмы с учетом возможного изменения дисперсионных свойств фотонов и перенормировки волновых функций фотонов, когда величина  $\sqrt{\beta}$  считается много больше, чем характерные параметры среды: температура ( $T$ ), химический потенциал ( $\mu$ ) и энергии фотонов и электронов. Как было показано ранее, в этом случае электроны и позитроны плазмы находятся на основном уровне Ландау. Как уже неоднократно отмечалось ранее, такие условия могут, в частности, реализовываться в модели вспышки SGR [12, 199] или во внешней части коры нейтронной звезды с сильным магнитным полем. В последнем случае концентрация электронов связана с плотностью вещества

$\rho$  следующим образом

$$n_{e^-} \simeq \frac{m^3}{2\pi^2} \frac{\rho_6 Z}{A}, \quad \rho_6 = \frac{\rho}{10^6 \text{ г/см}^3}, \quad (4.1)$$

так что при  $Z = 26$ ,  $A = 56$ , полях  $B \gtrsim 5 \times 10^{15}$  Гс и температурах  $T < m$  условие (3.1) выполняется вплоть до значений плотности вещества  $\sim 10^{10}$  г/см<sup>3</sup>.

План главы следующий. В разделе 4.2 приводятся инвариантные амплитуды реакций  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ . В разделе 4.3 вычисляются вклады рассматриваемых процессов в нейтринную светимость. В частности, рассматривается методический прием вычисления светимости фотонейтринного процесса,  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ , через ширину поглощения фотона. На основе изложенной методики показано, что в случае релятивистской плазмы нейтринная светимость за счет процесса  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$  существенно модифицируется по сравнению с имеющимися в литературе результатами. В разделе 4.4, исходя из возможной модификации кривой охлаждения нейтронной звезды за счет изменения нейтринной светимости в сильном магнитном поле, делается предположение об ограничении на величину индукции магнитного поля во внешней коре магнитара. Материал главы основан на работах [151, 161, 200, 201].

## 4.2. Вычисление амплитуд

При вычислении амплитуд процессов  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  мы будем рассматривать случай относительно малых передач импульса по сравнению с массой  $W$  - бозона,  $|q^2| \ll m_W^2$ . Тогда слабое взаимодействие нейтрино с электронами можно описывать в локальном пределе эффективным лагранжианом (1.4) из главы 1. С учетом взаимодействия электронов с фотонами полный лагранжиан примет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}(X) \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) \psi(X)] J_\alpha + e(\bar{\psi}(X) \hat{A}(X) \psi(X)). \quad (4.2)$$

В пределе сильно замагниченной плазмы, когда все электроны (реальные и виртуальные) занимают основной уровень Ландау, из формул (1.32), (1.47) – (1.50) и (1.53), (1.63) – (1.65) главы 1, а также дисперсионных свойств фотонов, рассмотренных в разделе 2.2 следует, что основной вклад в нейтринную светимость будут давать фотоны только одной поляризации с  $\lambda = 2$ , см. (2.20).

Отметим, что при вычислении светимости, обусловленной фотонейтринным процессом, оказывается возможным применить полезный методический прием факторизации амплитуды фоторождения нейтрино,  $\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}}$ , с выделением амплитуды комптоновского рассеяния фотона моды 2, полученной в разделе 2.3, следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}} = \frac{G_F}{e \sqrt{2q_{\parallel}^{\prime 2}}} [C_V (q' \tilde{\varphi} j) - C_A (q' \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} j)] \mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}, \quad (4.3)$$

где (см. формулу (2.38) главы 2)

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2} = 16\pi\alpha m \frac{\sqrt{q_{\parallel}^2 q_{\parallel}^{\prime 2}} \sqrt{(-Q_{\parallel}^2)} \kappa}{(q \tilde{\Lambda} q')^2 - \kappa^2 (q \tilde{\varphi} q')^2}. \quad (4.4)$$

Здесь  $q_{\alpha}^{\prime} - 4$  - импульс  $\nu \bar{\nu}$  пары.

Амплитуда процесса конверсии фотона в пару нейтрино-антинейтрино,  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ , может быть получена из амплитуды процесса  $\nu \rightarrow \nu \gamma$  [202] и представлена в виде

$$\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}e} [C_V (q' \tilde{\varphi} j) - C_A (q' \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} j)] \frac{\kappa^{(2)}(q')}{\sqrt{q_{\parallel}^{\prime 2}}}. \quad (4.5)$$

Наконец, амплитуда процесса с двумя фотонами,  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ , в случае зарядово несимметричной сильно замагниченной плазмы может быть записана следующим образом (см. формулу (3.15) главы 3):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}} &= \frac{G_F \sqrt{2} \pi}{e} \beta \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} [C_V (q' \tilde{\varphi} j) - C_A (q' \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} j)] \times \\ &\times \Pi^{(0)}(q', q, q''), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)}(q, q', q'') &= \frac{\sqrt{q_{\parallel}'^2 q_{\parallel}''^2}}{(q' \tilde{\varphi} q'')} \left[ \mathcal{J}_2^{(-)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q'_{\parallel}, -q_{\parallel}) - \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q''_{\parallel}, q'_{\parallel}) - (q' \leftrightarrow q'') \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отметим, что в отличие от относительно горячей плазмы ( $T \gtrsim \mu$ ), в пределе  $T \ll \mu - m$  амплитуда (4.6) уже не будет подавляться фактором  $\mu/T$ , поскольку входящий в (4.7) интеграл

$$\mathcal{J}_2^{(-)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) = 2m^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{E} \frac{f_-(E)}{[q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}][q_{\parallel}'^2 + 2(pq'_{\parallel})]} \quad (4.8)$$

зависит только от функции распределения электронов.

### 4.3. Нейтринная светимость

Нашей основной целью является получение выражений для энергии, уносимой нейтрино из единицы объема коры нейтронной звезды за единицу времени, за счет процессов  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ . В свою очередь излучательная способность нейтрино, в предположении, что мы пренебрегаем обратным влиянием потерь энергии и импульса на состояние плазмы, может быть определена как нулевая компонента 4-вектора энергии-импульса, передаваемого в этом процессе от нейтрино единице объема внешней среды за единицу времени, и представлена в следующем виде [17, 203]:

$$Q = \frac{1}{V} \int \prod_i d\Gamma_i f_i \prod_f d\Gamma_f (1 \pm f_f) q'_0 \frac{|S_{if}|^2}{\tau}, \quad (4.9)$$

где  $d\Gamma_i$  ( $d\Gamma_f$ ) – число состояний начальных (конечных) частиц;  $f_i$  ( $f_f$ ) – соответствующие функции распределения, знак  $+$  ( $-$ ) отвечает конечным бозонам (фермионам);  $q'_0$  – энергия нейтринной пары;  $V = L_x L_y L_z$  – объем плазмы,  $\tau$  – время взаимодействия.

Соответствующие  $S$ -матричные элементы процессов  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  можно представить в виде:

$$S_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^3(p_1 + q - p_2 - q')}{\sqrt{2\omega V 2E_1 L_y L_z 2E_2 L_y L_z 2E' V 2E'' V}} \mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}}, \quad (4.10)$$

$$S_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q - q')}{\sqrt{2\omega V 2E' V 2E'' V}} \mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}, \quad (4.11)$$

$$S_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q + q'' - q')}{\sqrt{2\omega V 2\omega'' V 2E' V 2E'' V}} \mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}, \quad (4.12)$$

где амплитуды  $\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}}$ ,  $\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}$  и  $\mathcal{M}_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}$  определяются согласно (4.3) – (4.6). Здесь  $p'^\mu = (E', \mathbf{p}')$  и  $p''^\mu = (E'', \mathbf{p}'')$  – 4-импульсы нейтрино и антинейтрино,  $p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}_1)$  – 4-импульс начального электрона,  $p_2^\mu = (E_2, \mathbf{p}_2)$  – 4-импульс конечного электрона,  $E_{1,2} = \sqrt{p_{1,2z}^2 + m^2}$ ,  $q^\mu = (\omega, \mathbf{k})$  и  $q''^\mu = (\omega'', \mathbf{k}'')$  – 4-импульсы начальных фотонов,  $q'^\mu = (p' + p'')^\mu$  – суммарный 4-импульс нейтрино-антинейтринной пары.

С учетом (4.10) – (4.12) распишем нейтринную излучательную способность (4.9) для каждого процесса в отдельности:

$$\begin{aligned} Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} &= \frac{(2\pi)^3}{L_x} \int |\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}}|^2 Z_2 \delta_{0,y,z}^3(q + p_1 - p_2 - q') \times \\ &\times q'_0 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega} f_\omega \frac{dp_{1y} dp_{1z}}{(2\pi)^2 2E_1} \frac{dp_{2y} dp_{2z}}{(2\pi)^2 2E_2} \times \\ &\times f_-(E_1) [1 - f_-(E_2)] \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3 2E''}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} Q_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} &= (2\pi)^4 \int |\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}}|^2 Z_2 \delta^4(q - q') \times \\ &\times q'_0 \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2\omega} f_\omega \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3 p''}{(2\pi)^3 2E''}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
Q_{\gamma\gamma\rightarrow\nu\bar{\nu}} &= \frac{(2\pi)^4}{2} \int |\mathcal{M}_{\gamma\gamma\rightarrow\nu\bar{\nu}}|^2 Z_2 Z_2'' \delta^4(q + q'' - q') \times \\
&\times q'_0 \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\omega} f_\omega \frac{d^3q''}{(2\pi)^3 2\omega''} f_{\omega''} \times \\
&\times \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3 2E''}.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Отметим, что при интегрировании по импульсам фотонов в (4.13) – (4.15) важно учитывать нетривиальный закон дисперсии фотона в сильном магнитном поле, который определяется поляризационным оператором фотона. Кроме того, в общем случае необходимо также учитывать большие радиационные поправки, которые сводятся к перенормировке волновой функции фотона,  $Z_2, Z_2''$ , что сильно затрудняет вычисление светимостей.

Однако, если ограничиться рассмотрением случая холодной ( $T \ll \mu - m$ ) плазмы, выражения для светимостей (4.13) – (4.15) можно сильно упростить. Из результатов раздела 2.2 следует, что при  $T \ll \mu - m$  интегралы по импульсам фотонов будут, в основном, набирать свою величину в области вблизи плазменной частоты,  $\omega_p^2 = (2\alpha\beta/\pi)v_F$ . Тогда в этой области закон дисперсии для фотона второй моды будет определяться соотношениями (2.29) – (2.31). Кроме того, если это не вызывает затруднений, будем считать, что  $Z_2 \simeq Z_2'' \simeq 1$ . Учитывая вышесказанное, рассмотрим нейтринные светимости для каждого процесса в отдельности.

#### 4.3.1. Процесс $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$

Следует отметить, что вклад плазмы в амплитуду процесса  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  оказывается более высокого порядка малости по константе электромагнитного взаимодействия  $\alpha$ . Действительно, учет плазменного вклада в амплитуду приводит к дополнительным диаграммам рассеяния вперед на частицах среды, и, следовательно, к дополнительной паре вершин порядка не ниже  $\alpha$ . Кроме того, предполагая дальнейшее интегрирование по импульсу (энергии) начального электрона, произведение статистических факторов можно с хорошей точностью

аппроксимировать  $\delta$  - функцией, как это показано в 2.4.2 и работах [197, 204]:

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{E_1-\mu}{T}\right)+1} \frac{1}{\exp\left(-\frac{E_2-\mu}{T}\right)+1} \simeq \frac{Q_0}{1-\exp(-Q_0/T)} \delta(E_1-\mu). \quad (4.16)$$

Подставляя (4.16) в (4.13), получим

$$\begin{aligned} Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} &= \frac{(2\pi)^3}{L_x} \int |\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}}|^2 \delta^{0,2,3}(q+p_1-p_2-q') \times \\ &\times \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{1}{e^{\omega/T}-1} \frac{dp_{1y}dp_{1z}}{(2\pi)^2 2E_1} \frac{dp_{2y}dp_{2z}}{(2\pi)^2 2E_2} \times \\ &\times \frac{Q_0 q'_0}{1-\exp(-Q_0/T)} \delta(E_1-\mu) \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3 2E''}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

С учетом факторизации амплитуды (4.3) нейтринную светимость можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} &= \frac{G_F^2}{4\pi\alpha} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^3p''}{(2\pi)^3 2E''} \frac{q_0'^2}{q_{||}'^2} \times \\ &\times |C_V(q'\tilde{\varphi}j) - C_A(q'\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}j)|^2 \Gamma^{cr}(q'). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma^{cr}(q') &= \frac{(2\pi)^3}{2q_0' L_x} \int |\mathcal{M}_{2\rightarrow 2}|^2 \delta^{0,2,3}(q+p_1-p_2-p'-p'') \times \\ &\times \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} \frac{1}{e^{\omega/T}-1} \frac{dp_{1y}dp_{1z}}{(2\pi)^2 2E_1} \frac{dp_{2y}dp_{2z}}{(2\pi)^2 2E_2} \times \\ &\times \frac{Q_0}{1-\exp(-Q_0/T)} \delta(E_1-\mu) \end{aligned} \quad (4.19)$$

– полная ширина рождения фотона с 4-импульсом  $q'^\mu$  в комптоновском процессе  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . Она связана с соответствующей шириной комптоновского поглощения фотона,  $\Gamma^{abs}$ , соотношением [205]

$$\Gamma^{cr}(q) = e^{-q_0/T} \Gamma^{abs}(q). \quad (4.20)$$

Последняя может быть получена из формулы (2.54) главы 2 и представлена в следующем виде

$$\begin{aligned} \Gamma^{abs}(q) &= \frac{\beta}{8(2\pi)^4 q_0 p_F} \int \frac{d^3q'}{E_2 q_0'} |\mathcal{M}_{2\rightarrow 2}|^2 \frac{Q_0}{1-\exp(-Q_0/T)} \times \\ &\times \frac{\delta(q_0+\mu-E_2-q_0')}{1-\exp(-q_0'/T)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

В предельных случаях нерелятивистской и релятивистской плазмы выражение для  $\Gamma^{abs}$  упрощается, а именно:

а) в нерелятивистской плазме

$$\Gamma^{abs}(q) \simeq \frac{4\alpha^2\beta T}{3\pi p_F m} \frac{q_{\parallel}^2}{q_0^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2q_0^2}\right) \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{q_0^2}} \frac{\Theta(q_0 - \omega_p)}{1 - e^{-q_0/T}}, \quad \mu - m \ll m, \quad (4.22)$$

где  $\Theta(x)$  – тэта-функция Хевисайда;

б) в релятивистской плазме

$$\Gamma^{abs}(q) \simeq \frac{\alpha^2 T^2}{2\pi} \frac{B}{B_e} \left(\frac{m}{\mu}\right)^6 \frac{q_{\parallel}^4}{q_0} \left\{ \frac{1}{q_+^4} \int_{-\infty}^{\frac{q_{\parallel}^2 - \omega_p^2}{2Tq_+}} \frac{dxx}{1 - e^{-x}} \frac{1}{1 - e^{x - q_0/T}} \left(1 - \frac{2Tx}{q_-}\right) + \right. \\ \left. + (q_+ \leftrightarrow q_-) \right\}, \quad q_{\pm} = q_0 \pm q_z, \quad \mu \gg m. \quad (4.23)$$

При дальнейшем интегрировании (4.18) по импульсам нейтрино нужно учесть, что в процессе  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  не сохраняется компонента импульса вдоль оси  $x$ . Поэтому, для упрощения дальнейших вычислений, удобно ввести в (4.18) еще один интеграл по 4-импульсу нейтринной пары  $q'^{\mu}$ , содержащий необходимую  $\delta^{(4)}$  - функцию:

$$1 = \int d^4 q' \delta^{(4)}(q' - p' - p''). \quad (4.24)$$

После этого можно проинтегрировать (4.18) по импульсам нейтрино с учетом известного соотношения [141]

$$\int \frac{d^3 p'}{E'} \frac{d^3 p''}{E''} \delta^{(4)}(q' - p' - p'') j_{\alpha} j_{\beta}^* = \frac{16\pi}{3} (q'_{\alpha} q'_{\beta} - q'^2 g_{\alpha\beta}) \Theta(q'^2), \quad (4.25)$$

где  $j_{\alpha} = \bar{\nu}\gamma_{\alpha}(1 + \gamma_5)\nu$  – нейтринный ток. Далее, интегрируя (4.18) по поперечным импульсам поглощающегося фотона,  $d^2 q_{\perp}$ , представим нейтринную светимость в виде двукратного интеграла

$$Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} = \frac{G_F^2}{12(2\pi)^5 \alpha} \left[ C_V^2 + C_A^2 \right] \int_0^{\infty} dq_0 q_0^2 e^{-q_0/T} \int_{-q_0}^{q_0} dq_z q_{\parallel}^4 \Gamma^{abs}(q_{\parallel}), \quad (4.26)$$

где константы  $\overline{C}_V^2 = 0.93$  и  $\overline{C}_A^2 = 0.75$  – результат суммирования по всем каналам рождения нейтрино типов  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ .

Полученное выражение для светимости фотонейтринного процесса можно значительно упростить в двух предельных случаях

**а)** в случае нерелятивистской плазмы,  $\mu \sim m$ , при произвольном соотношении между плазменной частотой и температурой имеем:

$$Q_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}} \simeq Q_s F\left(\frac{\omega_p}{T}\right), \quad (4.27)$$

где

$$Q_s = \frac{8\pi^2 \alpha G_F^2 \beta T^9}{4725 m p_F} \left[ \overline{C}_V^2 + \overline{C}_A^2 \right] \simeq 1.3 \cdot 10^6 B_{15}^2 \rho_6^{-1} T_8^9 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ с}} \quad (4.28)$$

– светимость в пределе  $\omega_p \ll T$  [198]. В (4.28) использованы обозначения  $B_{15} = B/(10^{15} \text{ Гс})$ ,  $\rho_6 = \rho/(10^6 \text{ г/см}^3)$ ,  $T_8 = T/(10^8 \text{ К})$ .

Функция  $F(\omega_p/T)$ , зависящая от отношения плазменной частоты к температуре, может быть представлена в виде однократного интеграла <sup>1</sup>

$$F(y) = \frac{15}{8\pi^8} \int_y^\infty \frac{dx x^5}{e^x - 1} \left( x^2 + \frac{y^2}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}. \quad (4.29)$$

В свою очередь интеграл (4.29) может быть приближен следующей аппроксимационной формулой:

$$F(y) \simeq \frac{45e^{-y}}{128\pi^8} (3y^7 + 31y^6 + 212y^5 + 1108y^4 + 4480y^3 + 13440y^2 + 26880y + 26880). \quad (4.30)$$

График функции  $F(y)$  представлен на рис. 4.1. Отметим, что численный анализ интеграла (4.29) в сравнении с аппроксимацией (4.30) дает расхождение не превышающее 14% для  $y \lesssim 10$ .

<sup>1</sup> В работе [161] ошибочно учтен лишний фактор, связанный с перенормировкой волновой функции фотона, который, однако, не влияет существенно на полученный результат.

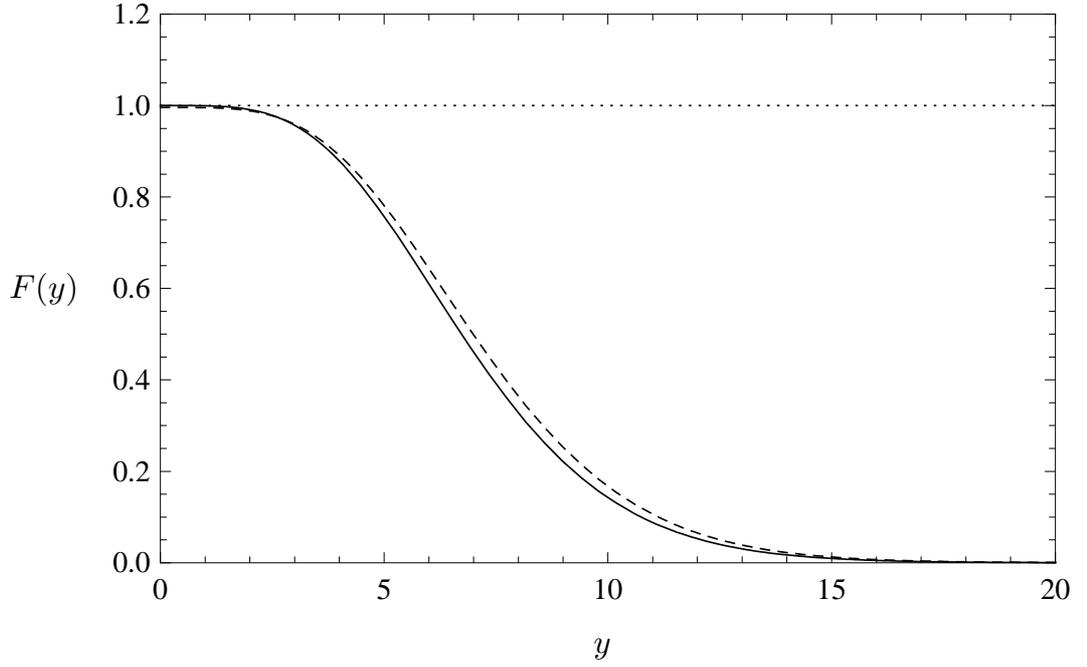


Рис. 4.1. Фактор  $F(y)$ , рассчитанный по формуле (4.29). Пунктирная линия отвечает аппроксимации (4.30). Точками обозначена асимптотика  $F(0) = 1$ .

б) в случае релятивистской плазмы,  $\mu \gg m$ , при произвольном соотношении между плазменной частотой и температурой получим:

$$Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} \simeq Q_b R \left( \frac{\omega_p}{2T} \right) \quad (4.31)$$

где

$$\begin{aligned} Q_b &= \frac{G_F^2 \alpha (\overline{C_V^2} + \overline{C_A^2})}{576 (2\pi)^{11/2}} \frac{B}{B_e} \left( \frac{m}{\mu} \right)^6 \omega_p^{15/2} T^{3/2} e^{-\omega_p/T} \\ &\simeq 10^{11} B_{16}^{43/4} \rho_9^{-6} T_9^{3/2} \exp \left( -6 B_{16}^{1/2} T_9^{-1} \right) \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{с}} \end{aligned} \quad (4.32)$$

– светимость в пределе  $\omega_p \gg T$  [197].

Здесь  $B_{16} = B/(10^{16} \text{ Гс})$ ,  $\rho_9 = \rho/(10^9 \text{ г/см}^3)$ ,  $T_9 = T/(10^9 \text{ К})$ .

Фактор  $R(z)$  представим в виде двукратного интеграла

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{3z^{3/2}}{5\sqrt{\pi}} e^{2z} \int_0^\infty dv v^6 e^{-zv} \int_0^1 \frac{dt t^4 [1 - (v - vt)^{-2}]}{1 - e^{-z[v(1-t) + (v-vt)^{-1}]} } \times \\ &\times \frac{vt - (v - vt)^{-1}}{1 - e^{-z[vt - (v-vt)^{-1}]} } [vt - 5(v - vt)^{-1}], \end{aligned} \quad (4.33)$$

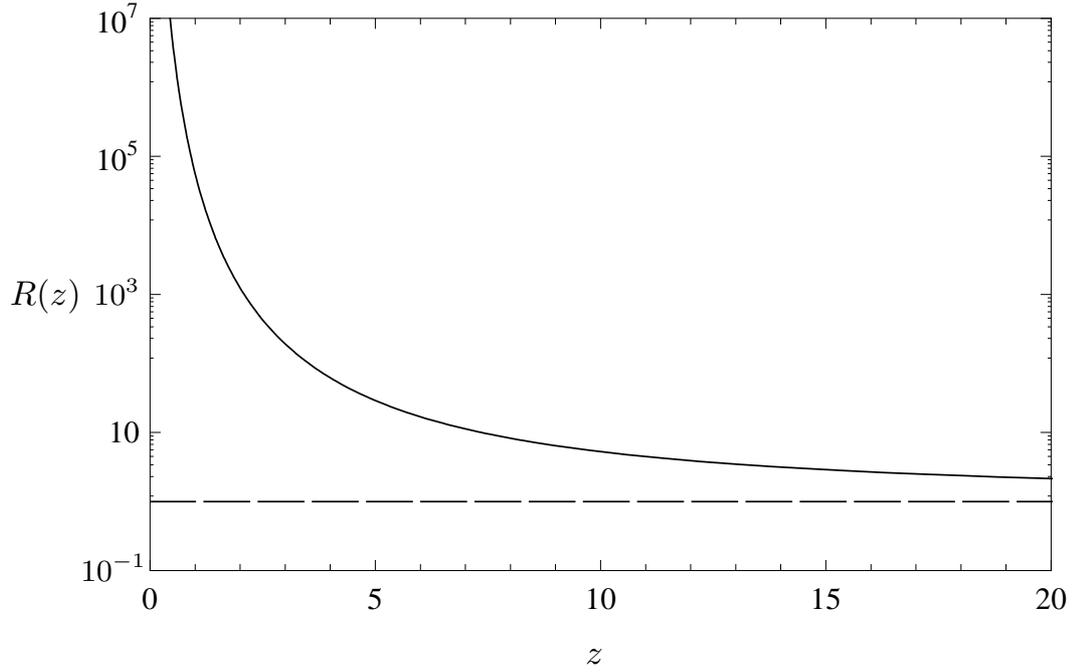


Рис. 4.2. Фактор  $R(z)$ . Сплошной линией показан результат расчета по формуле (4.33). Штриховая линия обозначает асимптотику  $R(\infty) = 1$ .

который хорошо описывается следующей аппроксимационной формулой:

$$\begin{aligned}
 R(z) \simeq & 1 + \frac{0.7627}{z^{1/2}} + \frac{66.875}{z^{3/2}} + \frac{271.654}{z^{5/2}} + \frac{2509.36}{z^{7/2}} + \frac{6754.62}{z^{9/2}} + \\
 & + \frac{16612.9}{z^{11/2}} + \frac{19843.8}{z^{13/2}} + \frac{10188.5}{z^{15/2}}. \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

График функции  $R(z)$  представлен на рис. 4.2. Отметим, что численный анализ интеграла (4.33) в сравнении с аппроксимацией (4.34) дает расхождение, не превышающее 0.8%. Следовательно, для приложений можно пользоваться аппроксимацией (4.34) для произвольной величины  $\omega_p/T$ .

Из рис. 4.2 и аппроксимационной формулы (4.34) видно, что для параметров поля и плазмы, характерных для нейтронных звезд,  $B \simeq 50B_e$ ,  $T \simeq 10^8$  К [17], фактор  $R(12) \simeq 4$  и асимптотика  $R(\infty) \simeq 1$  не выполняется. Кроме того, из формулы (4.31) следует, что количественная оценка, приведенная в работе [151], является сильно завышенной. С другой стороны, аналогичная оценка, выполненная в [197], является, наоборот, заниженной на несколько порядков.

### 4.3.2. Процесс $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$

Используя выражение для амплитуды (4.5), частично проинтегрируем (4.14), в результате получим:

$$Q_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} = \frac{G_F^2}{48\pi^2\alpha} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} Z_2 f_\omega q^4 \left[ \overline{C_V^2} q^2 + \overline{C_A^2} q_\perp^2 \right] \theta(q^2). \quad (4.35)$$

С учетом закона дисперсии (2.29) проинтегрируем (4.35) в цилиндрических координатах, в результате получим следующие простые выражения для предельных случаев релятивистской и нерелятивистской плазмы:

а) нерелятивистская плазма,  $\mu \sim m$

$$Q_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} \simeq \frac{G_F^2 \omega_p^9}{210\pi^4\alpha} \int_1^\infty \frac{dx x^2}{e^{x\omega_p/T} - 1} \left[ \overline{C_V^2} + \overline{C_A^2} (x^2 - 1) \right]; \quad (4.36)$$

б) релятивистская плазма,  $\mu \gg m$

$$Q_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} \simeq \frac{G_F^2 \omega_p^9}{96\pi^4\alpha} \int_1^\infty \frac{dx x \sqrt{x^2 - 1}}{e^{x\omega_p/T} - 1} \left[ \overline{C_V^2} + \frac{2}{3} \overline{C_A^2} (x^2 - 1) \right]. \quad (4.37)$$

Здесь переменная  $x = \omega/\omega_p$ .

В пределе  $\omega_p \ll T$  светимость (4.36) можно проинтегрировать до конца. В результате получим:

$$Q_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} \simeq \frac{G_F^2}{105\pi^4\alpha} \omega_p^4 T^5 \left[ \overline{C_V^2} \zeta(3) \left( \frac{\omega_p}{T} \right)^2 + 12 \overline{C_A^2} \zeta(5) \right], \quad (4.38)$$

где  $\zeta(x)$  – дзета-функция Римана [150].

В противоположном пределе,  $\omega_p \gg T$ , выражение (4.37) также интегрируется:

$$Q_{\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} \simeq \frac{G_F^2}{384\pi^{7/2}\alpha} \omega_p^9 \left[ \overline{C_V^2} \left( \frac{2T}{\omega_p} \right)^{3/2} + \overline{C_A^2} \left( \frac{2T}{\omega_p} \right)^{5/2} \right] \exp\left(-\frac{\omega_p}{T}\right). \quad (4.39)$$

### 4.3.3. Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$

Интегрируя (4.15) с использованием амплитуды (4.6), получим:

$$\begin{aligned} Q_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} &= \frac{G_F^2 \alpha^2(\beta)^2}{48\pi^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{Z_2}{\omega} f(\omega) \int \frac{d^3q''}{(2\pi)^3} \frac{Z_2''}{\omega''} f(\omega'') \times \\ &\times (\omega + \omega'') |\Pi^{(0)}(q + q'', q, q'')|^2 (q + q'')_{\parallel}^2 \times \\ &\times \left[ \overline{C_V^2}(q + q'')^2 + \overline{C_A^2}(q + q'')_{\perp}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

В случае вырожденной плазмы интеграл  $\mathcal{J}_2^{(-)}$  (формула (4.8)) вычисляется, и  $\Pi^{(0)}$  может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Pi^{(0)}(q, q', q'') &= \frac{4m^2 \sqrt{q_{\parallel}^2 q''_{\parallel}^2}}{q_{\parallel}^2 q''_{\parallel}^2 (q - q')_{\parallel}^2 + 4m^2 (q\tilde{\varphi}q')^2} \left[ F\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}, \frac{q'_z}{2m}, v_F\right) + \right. \\ &+ \left. F\left(\frac{q''_{\parallel}^2}{4m^2}, \frac{q''_z}{2m}, v_F\right) - F\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}, \frac{q_z}{2m}, v_F\right) \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

где

$$F(x, z, v_F) = \ln \frac{x(1-x) + (xv_F - z\sqrt{1-v_F^2})^2}{x(1-x) + (xv_F + z\sqrt{1-v_F^2})^2}.$$

Тем не менее, даже с учетом результата (4.41), выражение для светимости (4.40) все еще выглядит громоздко и неудобно для дальнейшего анализа. Его можно значительно упростить в рассмотренных выше пределах нерелятивистской и релятивистской плазмы. Из (4.41) получим соответственно

$$\Pi^{(0)}(q, q', q'') \simeq \frac{2}{m} v_F \sqrt{q_{\parallel}^2 q''_{\parallel}^2} \frac{q_z \omega^2 - q'_z \omega'^2 - q''_z \omega''^2}{\omega^2 \omega'^2 \omega''^2}, \quad \mu \sim m, \quad (4.42)$$

$$\Pi^{(0)}(q, q', q'') \simeq \frac{2}{m} \left(\frac{m}{\mu}\right)^3 \frac{q'_z q_{\parallel}^2 + q''_z q''_{\parallel}^2 - q_z q_{\parallel}^2 - 4q_z q'_z q''_z}{q_{\parallel}^2 \sqrt{q_{\parallel}^2 q''_{\parallel}^2}}, \quad \mu \gg m. \quad (4.43)$$

После подстановки (4.42) и (4.43) в (4.40) и несложных вычислений получим для нейтринной светимости следующие выражения

$$Q_{\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}} \simeq 1.15 \times 10^{15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ с}} v_F^2 \left(\frac{B}{B_e}\right)^2 \left(\frac{T}{m}\right)^7, \quad \mu \sim m, \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned}
Q_{\gamma\gamma\rightarrow\nu\bar{\nu}} &\simeq \frac{3G_F^2 \alpha^2 (\beta)^2}{2\pi^5 m^2} \left(\frac{m}{\mu}\right)^6 \omega_p^3 T^4 \times \\
&\times \left[ \overline{C_V^2} + \overline{C_A^2} \left(\frac{T}{\omega_p}\right) \right] \exp\left(-\frac{2\omega_p}{T}\right), \quad \mu \gg m.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Анализ полученных результатов показывает, что нейтринная светимость за счет процесса  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  сильно подавлена по сравнению со светимостью за счет процессов  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  и  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , как в случае нерелятивистской (подавляющий фактор  $v_F^2$ ), так и в случае релятивистской плазмы (подавляющий фактор  $(m/\mu)^6$ ) в достаточно широком интервале температур ( $10^8 \lesssim T \lesssim 3 \times 10^9$  К), плотностей ( $10^6 \lesssim \rho \lesssim 10^{10}$  г/см<sup>3</sup>) и магнитных полей ( $B \lesssim 10^{16}$  Гс.) Таким образом, возможное влияние процесса  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  на скорость остывания магнитара оказывается несущественным.

#### 4.4. Обсуждение

Обсудим полученные результаты. На рис. 4.3–4.6 представлены вклады в нейтринную светимость процессов  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  и  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  в зависимости от плотности вещества во внешней части коры нейтронной звезды для четырех значений температуры  $T = 3 \times 10^9, 10^9, 3 \times 10^8$  и  $10^8$  К и трех значений индукции магнитного поля  $B = 10^{16}, 5 \times 10^{15}$  и  $2.2 \times 10^{15}$  Гс. Кроме того, на рисунках для сравнения представлены нейтринные светимости за счет процессов аннигиляции  $e^+e^-$  пар (рис. 4.3) и распада плазмона (рис. 4.3–4.6)<sup>2</sup>. Из рис. 4.3–4.6 видно, что в области малых плотностей  $10^6 \lesssim \rho \lesssim 10^8$  г/см<sup>3</sup> основной вклад в нейтринную светимость будет давать фотонейтринный процесс, тогда как при плотностях  $10^8 \lesssim \rho \lesssim 10^{10}$  г/см<sup>3</sup> начинает доминировать процесс конверсии фотона,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ . Это обусловлено тем, что в области малых плотностей процесс конверсии кинематически подавлен малостью плазменной частоты (см. раздел

---

<sup>2</sup> По данным обзора [17].

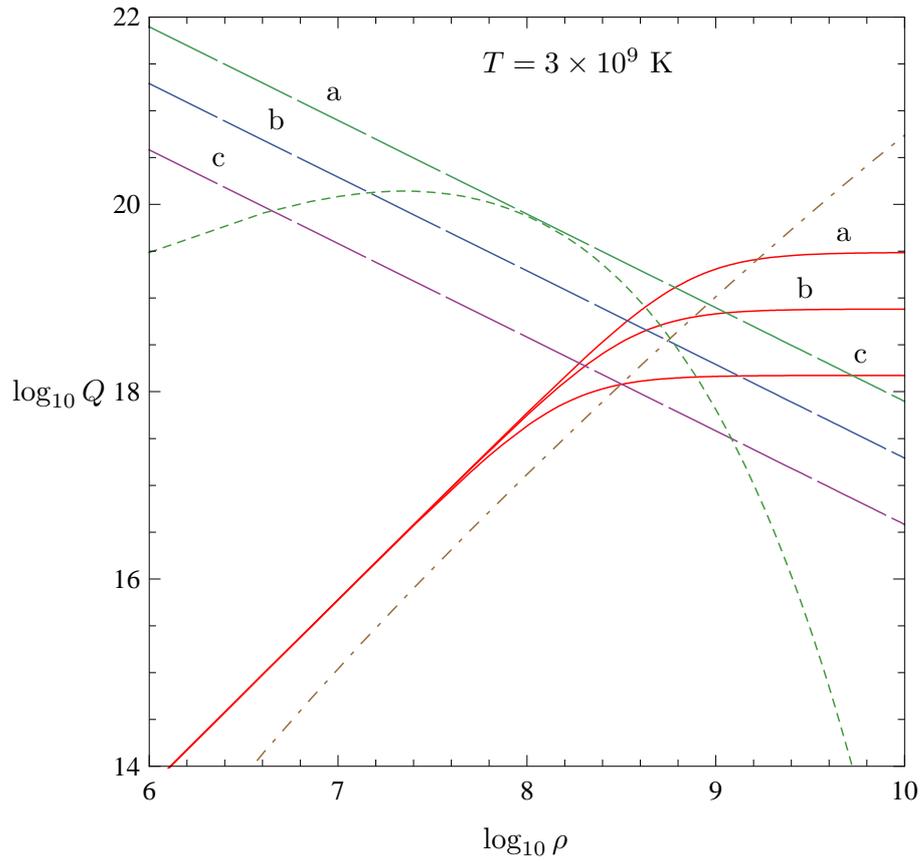


Рис. 4.3. Зависимость вкладов различных процессов в нейтринную светимость ( $\text{эрг}\cdot\text{см}^{-3}\cdot\text{сек}^{-1}$ ) от плотности вещества ( $\text{г}\cdot\text{см}^{-3}$ ) в наружном слое замагниченной коры нейтронной звезды при  $T = 3 \times 10^9 \text{ K}$ . Сплошная линия – процесс  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , штриховая – фотонейтринный процесс, пунктирная – аннигиляция  $e^+e^-$  пар при  $B = 0$  [17], штрих-пунктирная – процесс распада плазмона [17]. Буквы а, b и с соответствуют различным значениям индукции магнитного поля: а –  $10^{16} \text{ Гс}$ ., b –  $5 \times 10^{15} \text{ Гс}$ ., с –  $2.2 \times 10^{15} \text{ Гс}$ .

2 и формулы (4.38) и (4.39) ). При плотностях превышающих,  $10^{10} \text{ г}/\text{см}^3$ , химический потенциал согласно (4.1) будет больше или порядка  $\sqrt{\beta}$ , начинают возбуждаться следующие уровни Ландау и полученные формулы становятся неприменимыми. Строго говоря, уже при плотностях порядка  $10^9 \text{ г}/\text{см}^3$  становятся существенными резонансные эффекты на виртуальных электронах. Такая ситуация для процесса  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  подробно рассматривается в следующей главе (см. раздел 5.3.3).

Если опираться на модель остывания нейтронных звезд, рассмотренную в обзоре [17], нейтринные процессы в коре нейтронной звезды определяют ее охлаждение на начальной стадии эволюции ( $t \lesssim 10 \text{ лет}$ ). А именно, в период

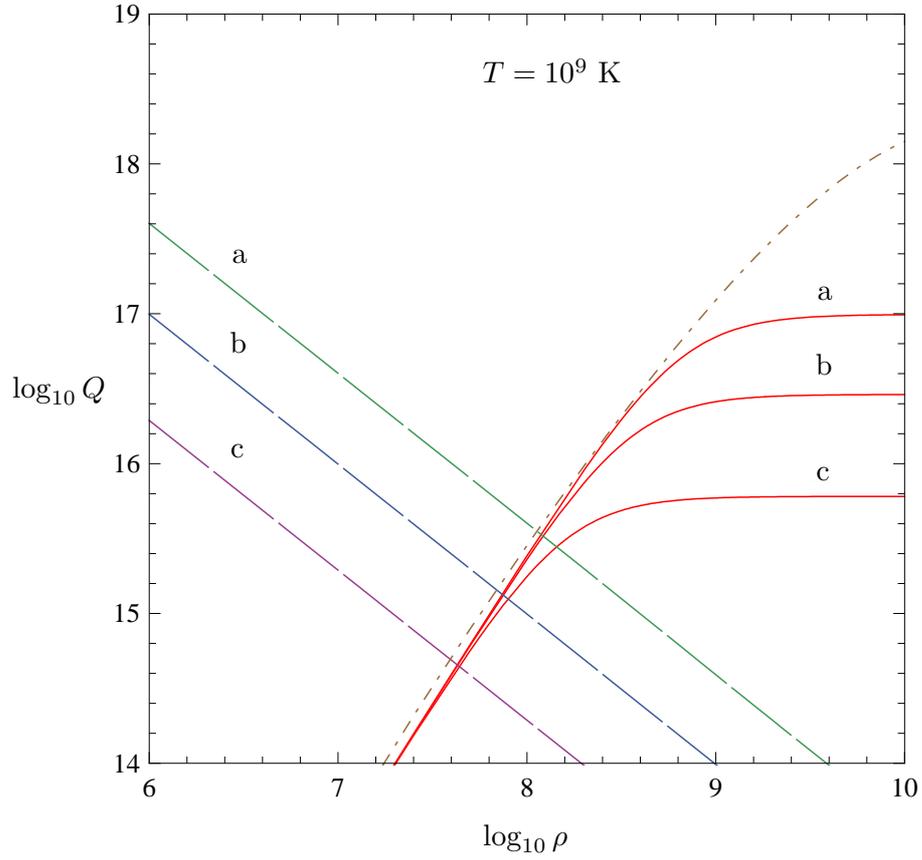


Рис. 4.4. То же, что и на рис. 4.3, для  $T = 10^9$  К. Вклад процесса аннигиляции пар в нейтринную светимость становится пренебрежимо малым.

$10^{-2} \lesssim t \lesssim 10$  лет, когда температура упадет ниже  $5 \times 10^9$  К, в обычной нейтронной звезде с массой  $\sim 1.5M_{\odot}$  и магнитным полем  $B \lesssim B_e$  доминирующим процессом будет являться распад плазмона. С другой стороны, как видно из рис. 4.3 и 4.4, при достаточно сильных полях ( $B \gtrsim 5 \times 10^{15}$  Гс) и температурах  $\sim 10^9$  К нейтринная светимость за счет процессов  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm} \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  значительно превышает светимость за счет тех же процессов, вычисленную без магнитного поля [17]. Этот факт может изменить поведение кривой охлаждения магнитара в течение первых десяти лет после его образования и, возможно, звезда в этот период будет остывать значительно быстрее. Если же мы хотим все время оставаться в рамках стандартного сценария охлаждения, т.е. когда вклады в нейтринную светимость за счет процессов  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  давали бы тот же порядок, что и распад плазмона (другими словами говоря, режим остывания магнитара в период  $t \gtrsim 10^3$  лет был бы таким же, как у обычных

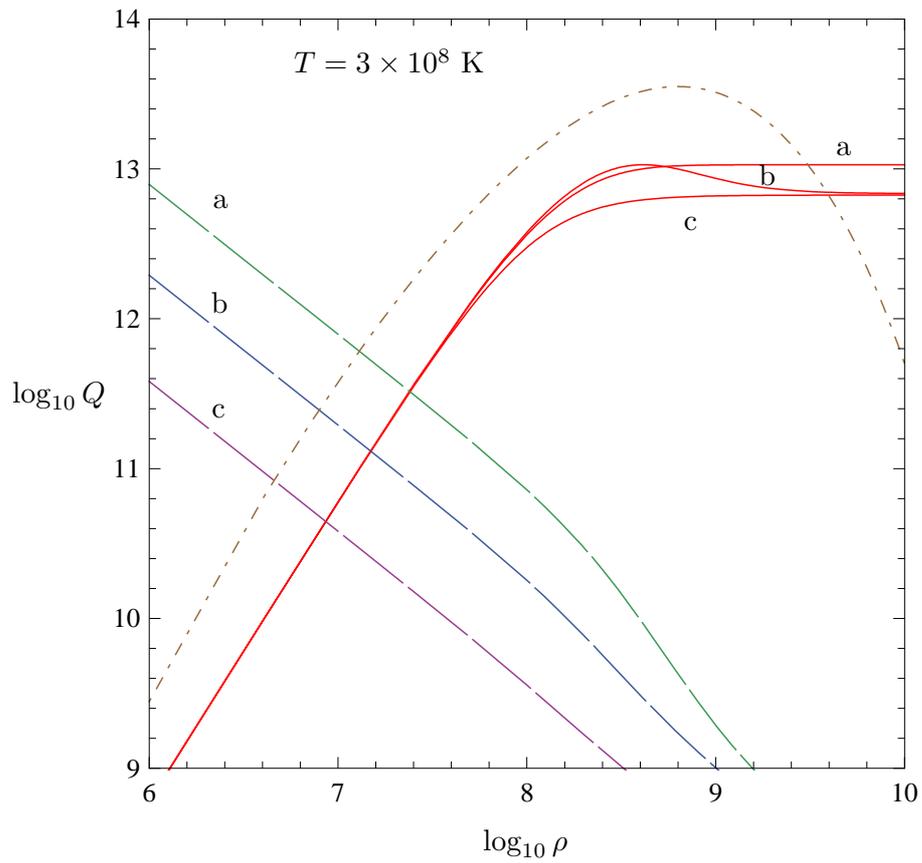


Рис. 4.5. То же, что и на рис. 4.3, для  $T = 3 \times 10^8 \text{ K}$ .

нейтронных звезд), то тогда либо величина индукции магнитного поля во внешней части коры молодой нейтронной звезды в среднем не должна превышать  $B \simeq 5 \times 10^{15} \text{ Гс}$ , либо модель остывания сильно замагниченной нейтронной звезды нуждается в уточнении. Отметим, что при температурах ниже  $10^9 \text{ K}$ , как видно из рис. 4.5 и 4.6, ожидать изменения сценария охлаждения за счет модификации замагниченной плазмой фотон-нейтринных процессов не приходится.

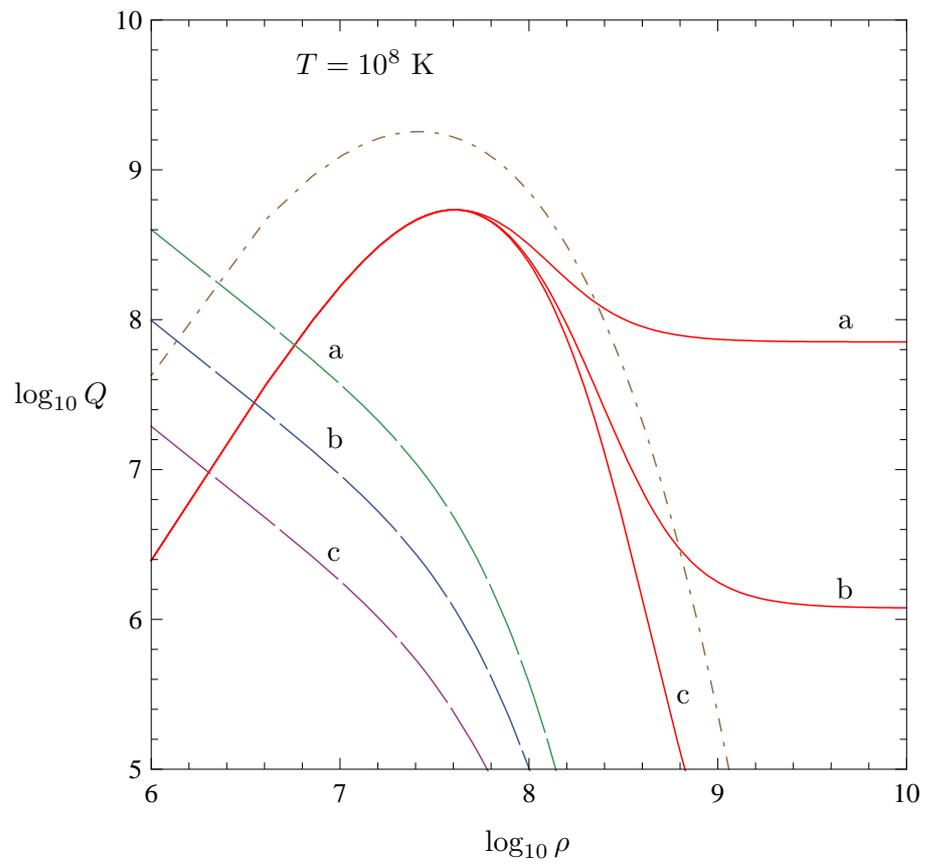


Рис. 4.6. То же, что и на рис. 4.3, для  $T = 10^8 \text{ K}$ .

## Резонансные процессы в замагниченной среде

### 5.1. Введение

В этой главе исследуются резонансные процессы в замагниченной среде. В частности, в рамках квантовой электродинамики рассматриваются два возможных типа резонансов: на виртуальном фотоне и виртуальном заряженном фермионе, которые могут давать основной вклад в физически наблюдаемые характеристики, такие как светимость и число рождаемых частиц.

В первой части главы рассматривается влияние замагниченной плазмы на процесс резонансного фоторождения аксионов на заряженных компонентах среды,  $i \rightarrow f + a$ . Такая задача возникла на пике современного интереса к вопросу о природе темной материи и возможности ее генерации. Так, оказывается возможным резонансное рождение аксионов при прохождении реликтового излучения через магнитосферу магнитара. Такой механизм производства холодной скрытой массы обсуждался недавно в работе [45].

Во второй части главы рассматривается случай резонанса на заряженном виртуальном фермионе в процессе вида  $jf \rightarrow j'f'$ , рассмотренного в главе 1, и исследуются два частных случая, когда в качестве начального и конечного фермионных состояний выступают электроны, под обобщенным током  $j$  в начальном состоянии понимается полевой оператор фотона, обобщенный ток  $j'$  в конечном состоянии представляет собой полевой оператор фотона или нейтринного тока.

Во третьей части главы проводится исследование комптоноподобного процесса  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm e^+ e^-$  и рождения электрон-позитронной пары при взаимодействии ультрарелятивистского электрона с мягким рентгеновским фотоном в окрестности полярной шапки магнитара. Оказывается, в таком процессе могут реали-

зовываться оба типа рассматриваемых резонансов – на виртуальном фотоне и виртуальном электроне. Этот процесс может рассматриваться как альтернатива стандартному механизму производства  $e^+e^-$  - плазмы в магнитосфере нейтронной звезды, имеющему ряд существенных физических недостатков.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [46, 128, 138, 152, 200, 206–211].

## 5.2. Резонансное рождение аксионов в магнитосфере магнитара

Как было отмечено во Введении к настоящей диссертации, аксион, предложенный Печчеи и Куинн [104] для решения проблемы сохранения CP инвариантности сильных взаимодействий, остается в настоящее время не только самым привлекательным решением проблемы CP, но и наиболее вероятным кандидатом на роль холодной темной материи Вселенной. Поскольку масштаб нарушения симметрии Печчеи-Куинн,  $f_a$ , оказывается велик, аксионы очень слабо взаимодействуют с веществом (константа взаимодействия  $f_a^{-1} \lesssim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-1}$  [106]). В этой связи возникают определенные трудности на пути экспериментального обнаружения аксиона.

Как уже неоднократно отмечалось ранее, влияние внешней активной среды на реакции с участием элементарных частиц и, в частности, аксионов, в зависимости от значений параметров среды (температуры  $T$ , химического потенциала  $\mu$  или индукции магнитного поля  $B$ ), может как катализировать эти реакции, так и оказывать дополнительное (к  $f_a^{-1}$ ) их подавление.

В таких условиях представляет интерес рассмотреть процесс рождения аксионов в реакции общего вида  $i \rightarrow f + a$  (диаграмма на рис. 5.1), где в начальном ( $i$ ) и конечном ( $f$ ) состояниях могут присутствовать заряженные компоненты среды. На рис. 5.1 зачерненный кружок обозначает эффективную вершину  $\gamma a$  взаимодействия (диаграммы на рис. 5.2). Нетрудно видеть, что из-за наличия

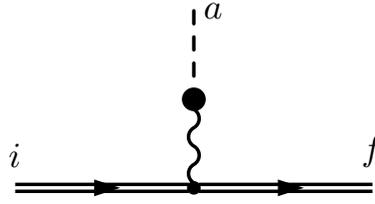


Рис. 5.1. Диаграммы Фейнмана для процесса общего вида  $i \rightarrow f+a$ . Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния учтено точно.

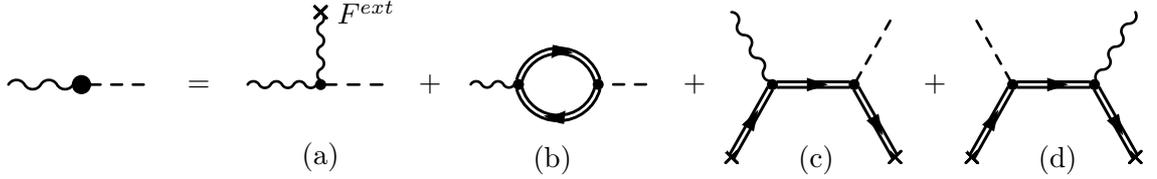


Рис. 5.2. Диаграммы Фейнмана для эффективной вершины  $\gamma a$  взаимодействия.

виртуального фотона рассматриваемый процесс может иметь резонансный характер. Похожая ситуация для области, близкой к резонансу, была рассмотрена в работе [45] на примере комптоновского рассеяния реликтовых фотонов на электронах и позитронах магнитосферы магнитара. Однако, как будет показано ниже, результаты, полученные в [45], являются неточными.

В существующих аксионных моделях и в присутствии внешнего магнитного поля процесс  $i \rightarrow f + a$  можно описать эффективным лагранжианом вида [106] (см. также формулы (1.2) и (1.3) главы 1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a\gamma}(x) = & g_{a\gamma} \tilde{F}^{\mu\nu} [\partial_\nu A_\mu(x)] a(x) + \\ & + \frac{g_{af}}{2m_f} [\bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_f(x)] \partial_\mu a(x) - e_f [\bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_f(x)] A_\mu(x). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Напомним, что  $A_\mu$  – четырехмерный потенциал квантованного электромагнитного поля,  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  – дуальный тензор внешнего поля,  $\psi_f(x)$  и  $a(x)$  – квантованные фермионное и аксионное поля,  $g_{a\gamma} = \alpha\zeta/2\pi f_a$ ,  $\zeta$  – модельно зависимый параметр порядка единицы,  $g_{af} = C_f m_f / f_a$  – безразмерная Юкавская константа связи аксионов с фермионами с модельно зависимым фактором  $C_f$ ,  $e_f$  – электрический заряд фермиона (для электрона  $e_f = -e$ ).

Исходя из лагранжиана (5.1) амплитуда процесса  $i \rightarrow f + a$  может быть

представлена в следующем виде

$$\mathcal{M}_{i \rightarrow f}^a = -\frac{\mathcal{M}_{if}^\gamma \mathcal{M}_{\gamma \rightarrow a}}{q'^2 - \varkappa^{(\varepsilon)}(q')}, \quad (5.2)$$

где  $\mathcal{M}_{if}^\gamma$  – амплитуда процесса  $i \rightarrow f + \gamma$  с излучением фотона в конечном состоянии,

$$\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow a} = i\bar{g}_{a\gamma}(\varepsilon \tilde{F} q') \quad (5.3)$$

– амплитуда перехода фотон  $\rightarrow$  аксион,  $q'^\mu = (\omega', \mathbf{k}')$  – четырехмерный импульс аксиона,  $\varkappa^{(\varepsilon)}(q')$  – собственное значение поляризационного оператора фотона, которому соответствует вектор поляризации  $\varepsilon_\alpha$ . Эффективную константу аксион-фотонного взаимодействия,  $\bar{g}_{a\gamma}$ , можно представить в виде трех слагаемых:  $\bar{g}_{a\gamma} = g_{a\gamma} + \Delta g_{a\gamma}^B + \Delta g_{a\gamma}^{pl}$ . Первое слагаемое соответствует взаимодействию аксиона с электромагнитным полем, обусловленному аномалией Адлера (диаграмма (а) на рис. 5.2), второе обусловлено взаимодействием аксиона с фотоном через электронную петлю (диаграмма (b) на рис. 5.2), а третье – рассеянием вперед на электронах и позитронах плазмы (диаграммы (c) и (d) на рис.2). Подробный расчет  $\Delta g_{a\gamma}^B$  и  $\Delta g_{a\gamma}^{pl}$  был сделан ранее в работах [212] и [213] соответственно. Здесь мы отметим только, что для корректного вычисления величины  $\Delta g_{a\gamma}^B$  в ней необходимо произвести вычитание, соответствующее аномалии Адлера [212]. Этот факт, в частности, не был учтен в работе [45], что является одной из причин ошибочности полученных там результатов.

Далее представим  $\varkappa^{(\varepsilon)}(q')$  в виде  $\varkappa^{(\varepsilon)} = \Re - i\Im$ , где  $\Re = Re(\varkappa)$  реальная, а  $\Im = Im(\varkappa)$  мнимая части поляризационного оператора. Последняя обусловлена процессами поглощения и излучения фотонов в плазме и, согласно [205], следующим образом выражается через полную ширину рождения фотона,  $\Gamma_{cr}$ :

$$\Im = \omega' \left( e^{\omega'/T} - 1 \right) \Gamma_{cr}, \quad \Gamma_{cr} = \sum_{i,f} \int |\mathcal{M}_{if}^\gamma|^2 d\Phi_{if}, \quad (5.4)$$

где  $d\Phi_{if}$  – элемент фазового объема состояний  $i$  и  $f$  для процесса  $i \rightarrow f + \gamma$  с учетом соответствующих функций распределения, и сумма берется по всем возможным начальным и конечным состояниям.

С учетом вышесказанного, аксионная светимость за счет всевозможных реакций с участием частиц плазмы может быть представлена в виде

$$Q = \sum_{i,f} \int d\Phi_{if} d\Phi' \omega' |\mathcal{M}_{if}^\gamma|^2, \quad (5.5)$$

где  $d\Phi' = \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}$  фазовый объем аксиона.

С учетом (5.2) и (5.4)  $Q$  примет вид

$$Q = \int \frac{d\Phi' |\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow a}|^2}{e^{\omega'/T} - 1} \frac{\Im}{(q'^2 - \Re)^2 + \Im^2}. \quad (5.6)$$

Как видно из (5.6), наиболее существенный вклад в аксионную светимость будет давать область резонанса, т.е. окрестность точки пересечения дисперсионных кривых аксиона  $q'^2 = m_a^2$  и фотона,  $q'^2 = \Re$ , так что фотон становится реальным. В окрестности резонанса часть подынтегрального выражения в (5.6) можно интерполировать  $\delta$ -функцией:

$$\frac{\Im}{(q'^2 - \Re)^2 + \Im^2} \simeq \pi \delta(q'^2 - \Re). \quad (5.7)$$

Воспользовавшись свойствами  $\delta$ -функции, перепишем (5.7) в виде

$$\frac{\Im}{(q'^2 - \Re)^2 + \Im^2} \simeq \pi \int \frac{d^3k}{2\omega} Z_\varepsilon \delta^4(q - q'), \quad (5.8)$$

где  $Z_\varepsilon^{-1} = 1 - \frac{\partial \Re}{\partial \omega^2}$  соответствует перенормировке волновой функции фотона.

С учетом (5.8) светимость (5.6) примет вид

$$Q \simeq (2\pi)^4 \int \frac{d^3k}{2\omega(2\pi)^3} \frac{\omega}{e^{\omega/T} - 1} \times \quad (5.9)$$

$$\times \int \frac{d^3k'}{2\omega'(2\pi)^3} Z_\varepsilon |\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow a}|^2 \delta^4(q - q').$$

Полученное выражение в точности соответствует формуле для аксионной светимости в процессе  $\gamma \rightarrow a$ . Таким образом, аксионная светимость в области резонанса за счет всевозможных реакций с участием частиц среды однозначно выражается через светимость перехода фотон  $\rightarrow$  аксион.

После интегрирования с  $\delta$ -функциями светимость приводится к виду

$$Q = \frac{\bar{g}_{a\gamma}^2(\beta)^2}{32\pi^2\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{\omega/T} - 1} \frac{Z_\varepsilon k(\varepsilon\tilde{\varphi}q)^2}{\left|1 - \frac{d\omega^2}{dk^2}\right|} \Big|_{k=k^*}. \quad (5.10)$$

Здесь  $x = \cos\theta$ ,  $\theta$  – угол между направлением импульса фотона и магнитным полем,  $k^* = k^*(\theta)$  – корень уравнения  $\omega^2(\mathbf{k}) = m_a^2 + k^2$ .

Дальнейшее вычисление светимости будет существенно зависеть от характеристик плазмы, определяющих, в конечном итоге, дисперсионные свойства фотонов. Здесь мы остановимся на двух частных случаях.

i) Слабо замагниченная плотная плазма,  $m_a^2 \ll \beta \ll T^2, \mu^2$ . В этом случае в качестве  $\varepsilon_\alpha$  будет выступать вектор поляризации продольного плазмона

$$\varepsilon_\alpha = \sqrt{\frac{q^2}{(uq)^2 - q^2}} \left( u_\alpha - \frac{(uq)}{q^2} q_\alpha \right), \quad (5.11)$$

где  $u_\alpha$  – 4-скорость плазмы. Светимость (5.10) примет простой вид

$$Q = \frac{\bar{g}_{a\gamma}^2(\beta)^2}{48\pi^2\alpha} \frac{(k^*)^3}{e^{k^*/T} - 1} \quad (5.12)$$

в полном согласии с результатом работы [214]. Отметим, что в данном пределе величина  $k^*$  не зависит от  $\theta$ , а определяется только параметрами плазмы.

ii) Сильно замагниченная нерелятивистская холодная плазма  $\beta \gg m^2$ ,  $\mu^2 \gg T^2$ . Здесь  $\varepsilon_\alpha = (q\tilde{\varphi})_\alpha / \sqrt{q_\parallel^2}$ ,  $\Re \simeq (q\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}q) \left( \frac{\omega_p^2(1+\xi)}{\omega^2} - \xi \right)$ , и плазменная частота  $\omega_p$  следующим образом связана с концентрацией электронов:  $\omega_p^2 = 4\pi\alpha n/m$ ;  $\xi = (\alpha/3\pi)(B/B_e)$ . Кроме того, в рассматриваемом пределе  $\bar{g}_{a\gamma} \simeq g_{a\gamma}$ . Однако, в отличие от случая слабо замагниченной плазмы, светимость до конца интегрируется лишь в некоторых частных случаях:

- масса аксиона – наименьший параметр задачи, т.е.  $\omega_p, T \gg m_a$  (например, рождение легких, с массой меньшей, чем  $10^{-5}$  эВ, аксионов в магнитосфере магнитара). В этом случае  $k^* \simeq \omega_p \sqrt{1 + 1/\xi}$  и светимость (5.10) примет

вид

$$Q \simeq \frac{g_{a\gamma}^2(\beta)^2}{16\pi^2\alpha} \omega_p^3 \frac{(1+\xi)^{3/2}}{\xi^{5/2}} \times \left( \exp \left[ \frac{\omega_p}{T} \sqrt{1 + \frac{1}{\xi}} \right] - 1 \right)^{-1}. \quad (5.13)$$

- $\omega_p \gg T \sim m_a$ . Анализ показывает, что в этом случае интеграл в (5.10) набирает свою величину в области  $x \simeq 1$ , и, следовательно,  $k^* \simeq \omega_p$ . Тогда светимость примет вид

$$Q \simeq \frac{g_{a\gamma}^2(\beta)^2}{16\pi^2\alpha} T m_a^2 e^{-\omega_p/T}. \quad (5.14)$$

Кроме светимости представляет самостоятельный интерес оценка количества аксионов, рождаемых в магнитосфере магнитара в единице объема за единицу времени с помощью рассмотренного выше резонансного механизма, поскольку аксион является одним из основных кандидатов в составляющие холодной темной материи. Аналогично (5.10), (5.13) и (5.14) получаем:

$$\frac{dN}{dt dV} = \frac{g_{a\gamma}^2(\beta)^2}{32\pi^2\alpha} \int_{-1}^1 \frac{dx}{e^{\omega/T} - 1} \frac{k Z_\varepsilon (\varepsilon \tilde{\varphi} q)^2}{\omega \left| 1 - \frac{d\omega^2}{dk^2} \right|} \Big|_{k=k^*}, \quad (5.15)$$

$$\frac{dN}{dt dV} \simeq \frac{g_{a\gamma}^2(\beta)^2}{16\pi^2\alpha} \omega_p^2 \frac{1+\xi}{\xi^2} \times \left( \exp \left[ \frac{\omega_p}{T} \sqrt{1 + \frac{1}{\xi}} \right] - 1 \right)^{-1}, \quad \omega_p, T \gg m_a, \quad (5.16)$$

$$\frac{dN}{dt dV} \simeq \frac{g_{a\gamma}^2(\beta)^2}{16\pi^2\alpha} \frac{T m_a^2}{\omega_p} e^{-\omega_p/T}, \quad \omega_p \gg T \sim m_a. \quad (5.17)$$

В частности, для числа аксионов, рождаемых реликтовым излучением ( $T \sim m_a \sim 10^{-3}$  эВ), при минимальной концентрации плазмы ( $\sim 10^{15}$  см $^{-3}$ ), при которой все еще реализуется резонансный механизм ( $\omega_p \gtrsim m_a$ ) и величине магнитного поля  $B = 100 B_e$ , получаем из (5.15) следующую максимальную оценку

$dN/(dVdt) \sim 10^{10}$  штук в  $\text{см}^{-3}$  за секунду. Таким образом, в объеме магнитосферы магнитара ( $\sim 10^{19} \text{см}^3$ ), заполненной сильным магнитным полем, рождается за секунду  $10^{29}$  аксионов. Оценивая в самом оптимистичном варианте число магнитаров в Галактике  $\sim 10^6$ , получаем, что за  $\sim 10^9$  лет они произведут  $\sim 10^{51}$  аксионов, и, следовательно, концентрация аксионов в Галактике должна быть  $n_a \sim 10^{-21} \text{см}^{-3}$ . Это число можно сравнить, например, с концентрацией барионов  $n_b \sim 10^{-7} \text{см}^{-3} \gg n_a$ . Следовательно, утверждение автора [45] о том, что «окрестности магнитных нейтронных звезд с полями  $B \gg B_e$  могут являться мощными генераторами по преобразованию реликтового излучения в аксионную составляющую холодной скрытой массы» не является верным.

### 5.3. Резонанс на виртуальном заряженном фермионе

#### 5.3.1. Факторизация $S$ - матричного элемента

Рассмотрим теперь другой тип резонанса, возникающий в процессе рассеяния вида  $jf \rightarrow j'f'$ , рассмотренного в главе 1. Как показал анализ амплитуды (1.23) (см. раздел 1.2), при выполнении условия  $\ell, \ell' < n$  существуют решения уравнения  $P_{\parallel}^2 - M_n^2 = 0$ , т.е. виртуальный фермион становится реальным с определенным законом дисперсии и имеет место резонанс на виртуальном фермионе. При этом, в случае малости  $\Im_{\Sigma}''(P)$  по сравнению с реальной частью, везде, кроме точки резонанса, основной вклад в амплитуду (1.23) для узкого резонансного пика будет давать только первая диаграмма на рис. 1.1.

Покажем, что в приближении узкого резонансного пика квадрат  $S$  - матричного элемента процесса перехода  $jf \rightarrow j'f'$  фермиона факторизуется произведением квадратов  $S$  - матричных элементов перехода фермиона из начального состояния в промежуточное и из промежуточного состояния в конечное соответственно.

Действительно, квадрат  $S$  - матричного элемента, усредненный по поляризационным состояниям начального фермиона и просуммированный по по-

ляризационным состояниям конечного фермиона, может быть представлен в следующем виде:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2, \quad (5.18)$$

где  $\tau$  – время взаимодействия,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s''=\pm 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int dX_1 dY_1 \frac{\bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i\Im_{\Sigma}^{s''}(P)} \right|^2 \end{aligned} \quad (5.19)$$

– квадраты соответствующих парциальных амплитуд. Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) &\equiv g_{k'} \bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) j'_{k'}(q') \Gamma_{k'} e^{iY_1 q'_x}, \\ \phi_{jf}^s(X_1) &\equiv g_k j_k(q) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1) e^{-iX_1 q_x}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Предполагая, что основной вклад в амплитуду будут давать области энергий вблизи резонансов, с учетом (Б.4), мы можем приближенно заменить соответствующую часть выражения (5.19)  $\delta$ -функцией:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 &\simeq \sum_{s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) \times \\ &\times \left| \int dX_1 dY_1 \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1) \right|^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

С учетом (5.21) квадрат  $S$  - матричного элемента процесса  $jf \rightarrow j'f'$  факторизуется следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} &= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} \times \\ &\times \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2E_n'')^2 (2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') |\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2 |\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь мы воспользовались свойством  $\delta$  - функции:

$$\delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) = \frac{1}{2E_n''} \delta(P_0 - E_n''), \quad (5.23)$$

где  $E_n'' = \sqrt{p_z''^2 + M_n^2}$ .

Нетрудно видеть, что теперь уравнение (5.22) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} &= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \times \\ &\times \frac{|\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2}{\tau}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'')}{\sqrt{2q_0 V 2E_{\ell} L_y L_z 2E_n'' L_y L_z}} \mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} \quad (5.25)$$

–  $S$ -матричный элемент перехода некоторого начального состояния  $jf$  в фермион с энергией  $E_n''$ , компонентами импульса  $p_y'', p_z''$  и поляризационным состоянием  $s''$ , находящийся на уровне Ландау  $n$ , с соответствующей амплитудой  $\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}$ :

$$\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} = \frac{\exp[-iq_x(p_y + p_y'')/(2\beta)]}{\sqrt{M_{\ell} M_n (M_{\ell} + m)(M_n + m)}} \left[ \frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_1^2}} \right]^{n-\ell} \mathcal{T}_k^{s''s}, \quad (5.26)$$

$\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$  –  $S$ -матричный элемент перехода фермиона из состояния с  $E_n''$ ,  $p_y''$ ,  $p_z''$ ,  $s''$ ,  $n$  в некоторое конечное состояние  $j'f'$ , с соответствующей амплитудой  $\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$ , причем  $\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''} = \mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}(q \rightarrow q', E_{\ell} \rightarrow E_{\ell}')$ .

Таким образом, основная часть задачи состоит в вычислении величин  $\mathcal{T}_k^{s''s}$ , которые выражаются через лоренц-коварианты и инварианты (1.25) – (1.28) в подпространстве  $\{0, 3\}$  и представлены в приложении В.

### 5.3.2. Реакция резонансного рассеяния $\gamma e \rightarrow \gamma e$

В качестве первого приложения полученных результатов рассмотрим процесс рассеяния фотона на электронах замагниченной среды,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , для энер-

гий начального фотона, близких к области резонанса. Мы будем вычислять коэффициент поглощения фотона в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , где начальный и конечный электроны могут находиться на уровнях Ландау  $\ell$  и  $\ell'$  соответственно, а виртуальный электрон может занимать уровень  $n$ . Определяя его формулой (2.39) главы 2, получим

$$W_{\gamma e \rightarrow \gamma e} = \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \times \quad (5.27)$$

$$\times \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \sum_{s, s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{VV}^{s's}|^2}{\tau}.$$

Напомним, что  $f_-(E_\ell)$  и  $f_-(E_{\ell'})$  – равновесные функции распределения начальных и конечных электронов соответственно,  $f_-(E_\ell) = \{\exp[(E_\ell - \mu)/T] + 1\}^{-1}$ ,  $T$  – температура,  $\mu$  – химический потенциал электронного газа,  $f_{\omega'}$  – функция распределения конечных фотонов в системе покоя плазмы,  $\mathcal{S}_{VV}^{s's}$  –  $S$ -матричный элемент процесса  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . Он может быть получен из (1.22) заменой  $m_f = m$ ,  $g_V = g'_V = e > 0$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha(q)$ ,  $j'_\alpha = \varepsilon_\alpha(q')$ .  $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$  и  $q'^\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$  – 4-векторы начального и конечного фотонов соответственно,  $\varepsilon_\alpha(q)$  и  $\varepsilon_\alpha(q')$  – их векторы поляризации. Анализ дисперсионных свойств фотонов в условиях магнитосфер радиопульсаров и магнитаров показывает, что фотон в таких условиях будет иметь поляризационные состояния, аналогичные ситуации сильно замагниченной, зарядово симметричной плазмы с  $\mu = 0$ , и определяемые согласно (2.20) (см. главу 2).

Предполагая, что основной вклад в коэффициент поглощения фотона будут давать области резонансов, с учетом (5.24), перепишем (5.27) в виде:

$$W_{\gamma^{(\lambda)} e \rightarrow \gamma^{(\lambda')} e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell, \ell'=0}^{n-1} \sum_{s, s', s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times$$

$$\times [1 - f_-(E_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\Gamma_n^{s''}} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau},$$

$$\lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (5.28)$$

Здесь связь  $\mathcal{S}_{e_\ell\gamma^{(\lambda)}\rightarrow e_n}^{s''s}$  с соответствующей амплитудой определяется формулой (5.25), в которой нужно заменить  $jf \rightarrow e_\ell\gamma^{(\lambda)}$ ,  $(n, s'') \rightarrow e_n$ .

С другой стороны, согласно [205] полную ширину изменения состояния электрона  $\Gamma_n^{s''}$  можно представить в виде суммы ширин поглощения,  $\Gamma_n^{(abs)s''}$ , и рождения,  $\Gamma_n^{(cr)s''}$ , электрона следующим образом:

$$\Gamma_n^{s''} = \Gamma_n^{(abs)s''} + \Gamma_n^{(cr)s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e_\ell\gamma}^{(abs)s''} \left[ 1 + e^{-(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{e_n \rightarrow e_\ell\gamma}^{(abs)s''} &= \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E_{\ell'}')] \times \\ &\times \frac{d^3q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e_\ell\gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau} \end{aligned} \quad (5.30)$$

– ширина поглощения электрона в процессе  $e_n \rightarrow e_\ell\gamma$ .

Подставляя (5.29) в (5.28) с учетом (5.30) и суммируя по поляризациям конечных фотонов, получим

$$\begin{aligned} W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} &\simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s,s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \times \\ &\times \frac{dp_y'' dp_z'' L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E_n'')] \frac{|\mathcal{S}_{e_\ell\gamma^{(\lambda)}\rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Интегрируя это выражение с учетом формул (B.9)–(B.12) из приложения B, получим следующие парциальные вклады в коэффициент поглощения фотона:

$$\begin{aligned} W_{\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma e} &= \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_-(E_\ell^\epsilon) [1 - f_-(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \\ &\times \left\{ [2\beta(n + \ell) - q_\parallel^2] (\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right\}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
W_{\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma e} &= \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_-(E_\ell^\epsilon)[1 - f_-(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \\
&\times \left\{ \left[ \frac{(2\beta(n - \ell))^2}{q_\parallel^2} - 2\beta(n + \ell) - 4m^2 \right] (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - \right. \\
&\left. - 8\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right\}, \tag{5.33}
\end{aligned}$$

$$E_\ell^\epsilon = \frac{1}{2q_\parallel^2} \left[ \omega (M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2) + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2} \right].$$

В (5.32) и (5.33) нижний предел суммирования по  $n$  определяется из закона сохранения энергии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left\lfloor \frac{q_\parallel^2 + 2M_\ell \sqrt{q_\parallel^2}}{2\beta} \right\rfloor, \tag{5.34}$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

В недавней работе [52] исследовался процесс комптоновского рассеяния в магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров ( $10^{12} - 10^{15}$ ) Гс, без  $\delta$ -функциональной аппроксимации резонансных пиков. Поэтому представляет интерес провести сравнительный анализ полученных нами результатов с соответствующими результатами работы [52]. Исходя из (5.31) и следуя авторам [52], введем сечение процесса  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , проинтегрированное по начальным электронам, с функцией распределения  $f_{E_\ell}$  при  $\mu = 0$ , следующим образом

$$\sigma_\lambda^* = \frac{1}{N_e} \int \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \tag{5.35}$$

где  $j = |(p\tilde{\varphi}q)|/(E\omega V)$  – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве,

$$N_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f_-(E_\ell) \tag{5.36}$$

– концентрация электронов во внешнем магнитном поле. Кроме того, для параметров поля и плазмы, характерных для магнитосфер радиопульсаров [15], мы можем пренебречь изменением (по сравнению с вакуумом) дисперсионных свойств фотонов, положив  $k_z = \omega \sin \theta$ , где  $\theta$  – угол между импульсом фотона и направлением магнитного поля. В силу этого, в области энергий фотонов  $\omega \ll m$  перенормировка волновой функции фотона также становится несущественной. Отметим, что данное утверждение заведомо не будет справедливым вблизи циклотронных резонансов, когда  $q_{\parallel}^2 \simeq (M_n + M_{\ell})^2$  (см., например, [130]).

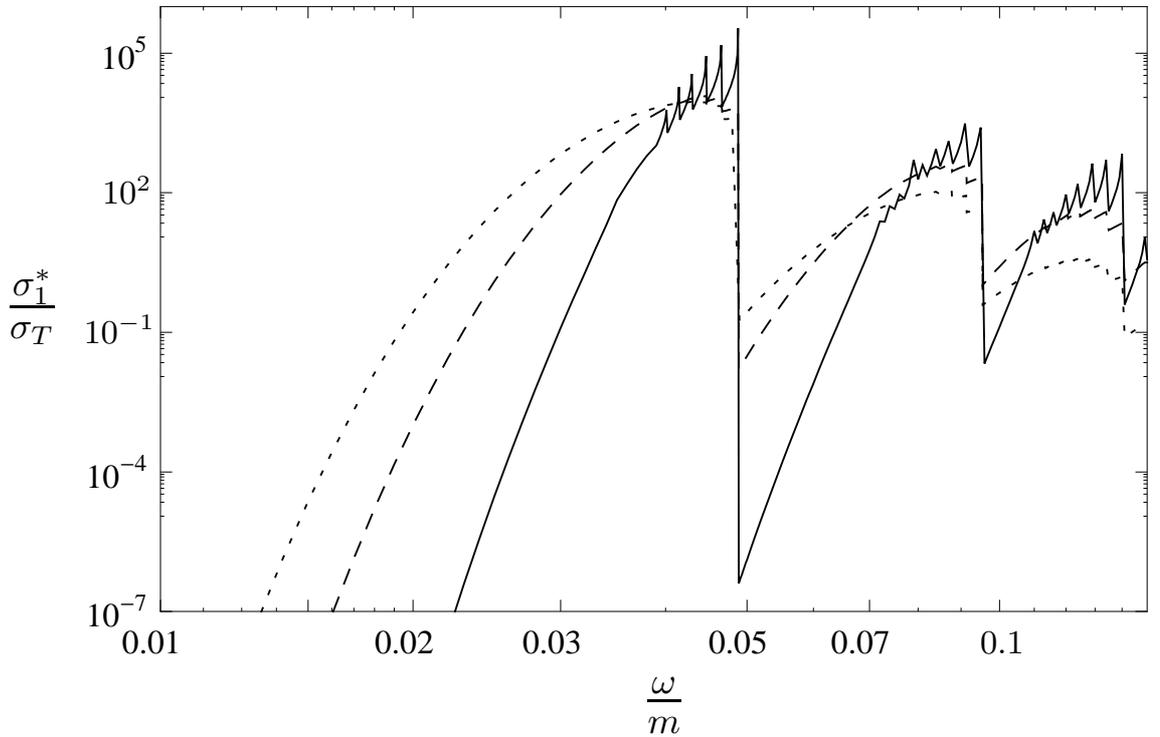


Рис. 5.3. Сечение (в единицах  $\sigma_T$ ) рассеяния фотона моды 1,  $\gamma^{(1)}e \rightarrow e$ , в сильном магнитном поле  $B = 5 \times 10^{12}$  Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения  $f_{E_{\ell}}$  при  $T = 20$  кэВ и  $\mu = 0$ , как функция энергии (в единицах массы электрона) фотона для различных значений углов между импульсом фотона и направлением магнитного поля:  $\theta = 90^\circ$  – сплошная кривая,  $\theta = 60^\circ$  – пунктирная кривая,  $\theta = 30^\circ$  – точечная кривая.

Результаты численного анализа отношения  $\sigma_{\lambda}^*/\sigma_T$ , где  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$  – томсоновское сечение, представлены на рис. 5.3 и 5.4. Полученные оценки в окрестности резонансных пиков хорошо согласуются с соответствующими результатами работы [52]. Следовательно, применение приближения (5.21) пра-

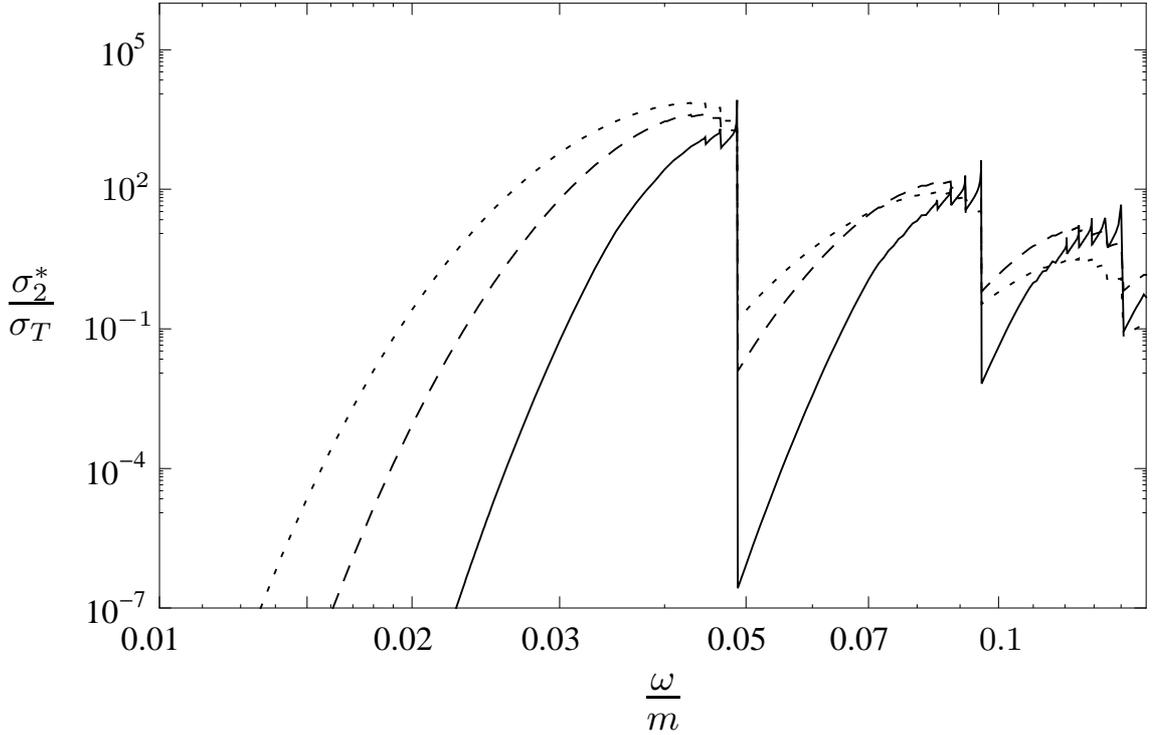


Рис. 5.4. То же, что и на рис. 5.3, для канала  $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$ .

вмочно в области полей  $B \sim 10^{12}$  Гс, характерных для радиопульсаров. С другой стороны, полученные нами коэффициенты поглощения фотона (5.32) и (5.33) имеют относительно простой вид, и, следовательно, оказываются гораздо более удобными в применении к решению задачи переноса излучения по сравнению с численно полученными результатами работы [52]. Отметим (см. рис. 5.3 и 5.4, а также (5.32) и (5.33)), что коэффициенты поглощения фотона для обеих мод имеют узкие максимумы, соответствующие значениям энергии фотона  $\omega_{nl} = (M_n - M_\ell)/\sin\theta$ , хорошо известные в литературе (см., например, [84, 215, 216]).

### 5.3.3. Резонансное рождение нейтрино-антинейтринных пар в комтоноподобном процессе $\gamma e \rightarrow \nu\bar{\nu}e$

В качестве еще одного приложения полученных результатов рассмотрим задачу о количестве энергии, уносимой нейтринной парой из единицы объема плотной замагниченной плазмы за единицу времени (так называемая нейтринная светимость) за счет процесса фоторождения нейтрино на электроны,

$\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , с учетом возможного резонанса на виртуальном электроне, которая была решена в главе 4 для нерезонансного случая. Величина светимости может быть представлена в виде [161]:

$$Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} = \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{d^3kV}{(2\pi)^3} f_{\omega} \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_{-}(E_{\ell}) \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times \quad (5.37)$$

$$\times [1 - f_{-}(E'_{\ell'})] \frac{d^3p_1 V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2 V}{(2\pi)^3} q'_0 \sum_{s, s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{VV}^{s's} + \mathcal{S}_{AV}^{s's}|^2}{\tau},$$

где  $f_{\omega}$  – равновесная функция распределения начального фотона с 4-импульсом  $q^{\mu} = (\omega, \mathbf{k})$ ,  $f_{-}(E_{\ell})$  и  $f_{-}(E'_{\ell'})$  – равновесные функции распределения начального и конечного электронов соответственно;  $q'_0 = E_1 + E_2$  – энергия нейтринной пары с  $E_{1,2} = |\mathbf{p}_{1,2}|$  и соответствующими импульсами  $\mathbf{p}_{1,2}$ ;  $\mathcal{S}_{VV}^{s's} + \mathcal{S}_{AV}^{s's} - S$  – матричный элемент процесса  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ . Он может быть получен из (1.22) заменой  $m_f = m$ ,  $g_V = e > 0$ ,  $j_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}(q)$ ,  $g'_V = G_F C_V / \sqrt{2}$ ,  $g'_A = G_F C_A / \sqrt{2}$ ,  $j'_{\alpha} = \bar{\nu}(p_1) \gamma_{\alpha} (1 + \gamma_5) \nu(p_2)$ .

Аналогично процессу  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  будем предполагать, что основной вклад в нейтринную светимость будут давать области резонансов. Тогда, с учетом (5.24), перепишем (5.37) в виде:

$$Q_{\gamma^{(\lambda)} e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell, \ell'=0}^{n-1} \sum_{s, s', s''=\pm 1} \int \frac{d^3kV}{(2\pi)^3} f_{\omega} \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_{-}(E_{\ell}) \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times$$

$$\times [1 - f_{-}(E'_{\ell'})] \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \frac{d^3p_1 V}{\Gamma_n^{s''}} \frac{d^3p_2 V}{(2\pi)^3} q'_0 \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\nu\bar{\nu}}^{s's''}|^2}{\tau},$$

$$\lambda = 1, 2. \quad (5.38)$$

В (5.38) связь  $\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\nu\bar{\nu}}^{s's''}$  с амплитудой определяется формулами (5.25) и (5.26) с соответствующими заменами  $\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s} \rightarrow \mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\nu\bar{\nu}}^{s's''}$ ,  $\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s} \rightarrow \mathcal{M}_{e_n \rightarrow e\ell'\nu\bar{\nu}}^{s's''}$  и  $q \rightarrow q'$ ,  $E_{\ell} \rightarrow E'_{\ell'}$ .

Используя (5.29), перепишем полную ширину изменения состояния элект-

трона  $\Gamma_n^{s''}$  в следующем виде:

$$\Gamma_n^{s''} \simeq \Gamma_{e\ell\gamma \rightarrow e_n}^{(cr) s''} \left[ 1 + e^{(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (5.39)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{e\ell\gamma \rightarrow e_n}^{(cr) s''} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s=\pm 1} \sum_{\lambda} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \times \\ &\times \frac{d^3 q V}{(2\pi)^3} f_\omega \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s'' s}|^2}{\tau} \end{aligned} \quad (5.40)$$

– ширина рождения электрона в процессе  $e\ell\gamma \rightarrow e_n$ .

Подставляя (5.39) в (5.38) с учетом (5.40), представим нейтринную светимость в следующем виде:

$$Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{n-1} Q_{e_n \rightarrow e_{\ell'}\nu\bar{\nu}}, \quad (5.41)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{e_n \rightarrow e_{\ell'}\nu\bar{\nu}} &= \frac{1}{L_x} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 2E_n''} f_-(E_n'') \frac{dp_y' dp_z'}{(2\pi)^2 2E_{\ell'}'} [1 - f_-(E_{\ell'}')] \times \\ &\times \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} q'_0 (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^3 (p'' - p' - q') |\mathcal{M}_{e_n \rightarrow e_{\ell'}\nu\bar{\nu}}|^2 \end{aligned} \quad (5.42)$$

– нейтринная светимость за счет процесса  $e_n \rightarrow e_{\ell'}\nu\bar{\nu}$ . Здесь  $q'_\mu = (p_1 + p_2)_\mu$ . Квадрат амплитуды процесса  $e_n \rightarrow e_{\ell'}\nu\bar{\nu}$ , просуммированный по поляризованным состояниям начального и конечного электрона, вычисляется с помощью формул (B.9) – (B.16) из приложения B и имеет вид:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{e_n \rightarrow e_{\ell'}\nu\bar{\nu}}|^2 &= \frac{16}{3} G_F^2 \left( \overline{C_V^2} + \overline{C_A^2} \right) \left\{ [2q'^2(\beta(n + \ell') + m^2) + m^2 q_\perp'^2] \times \right. \\ &\times (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2 - \mathcal{I}_{n,\ell'}'^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}'^2) - q'^4 (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2) + \\ &+ m^2 q'^2 (\mathcal{I}_{n,\ell'}'^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}'^2) \left. \right\} - G_F^2 \left( \overline{C_V^2} - \overline{C_A^2} \right) m^2 \left\{ (2q_\parallel'^2 - q_\perp'^2) \times \right. \\ &\times (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2 - \mathcal{I}_{n,\ell'}'^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}'^2) + 3q'^2 (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Полученный результат для светимости (5.42) с учетом вычисленной амплитуды (5.43), с точностью до обозначений, совпадает с приведенным в работе [17]

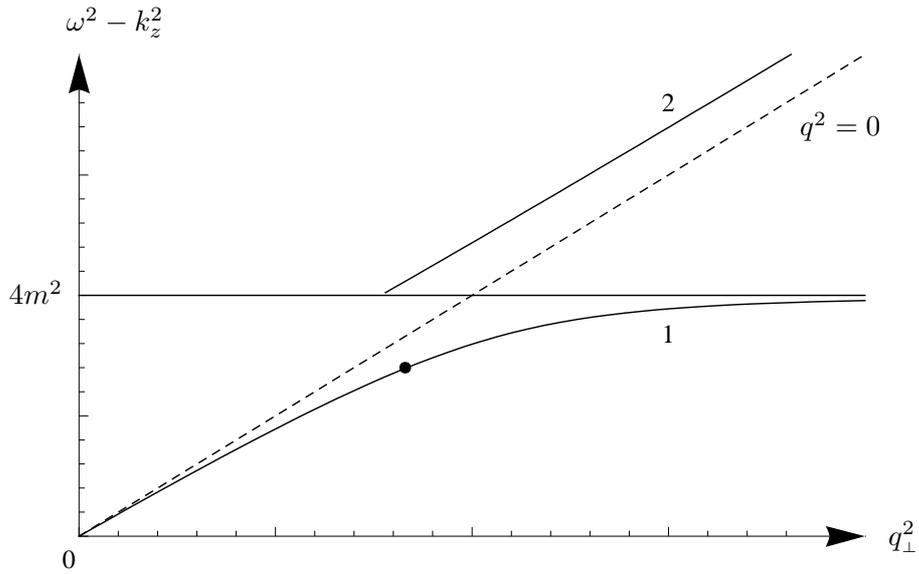


Рис. 5.5. Закон дисперсии фотона в сильном магнитном поле. Точкой на дисперсионной кривой показано положение фотона, рождающегося в реакции  $e\gamma \rightarrow e\gamma$ . Цифры 1 и 2 обозначают дисперсионные кривые в областях ниже и выше порога рождения  $e^+e^-$ -пар.

и обобщает полученную ранее в [128] формулу на случай, когда начальный и конечный электроны находятся на произвольных уровнях Ландау.

#### 5.4. Резонансный механизм рождения $e^+e^-$ пар в полярной шапке магнитара

Наконец, рассмотрим реакцию  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$ , в которой могут иметь место одновременно два резонанса: на виртуальном фотоне и на виртуальном электро-не, что особенно важно для актуальной в настоящее время проблемы описа-ния особенностей радиоизлучения некоторых магнитаров [11, 12, 14, 177, 178].

Согласно общепринятой модели, для формирования радиоизлучения в ра-диопульсаре необходима эффективная генерация электрон-позитронной плаз-мы в его магнитосфере [83], причем механизмы рождения  $e^+e^-$ -пар в радио-пульсарах хорошо известны (см., например, [84, 87]).

В модели магнитосферы магнитара рождение  $e^+e^-$ -пар происходит в два этапа [16]. Ускоренная вдоль магнитного поля заряженная частица (электрон или позитрон) резонансно конвертирует мягкий рентгеновский фотон в жест-

кий, который впоследствии, как предполагается, после набора угла между импульсом фотона и направлением магнитного поля (так называемый питч-угол), должен распадаться на электрон-позитронную пару. Однако в действительности этого не происходит, так как в сильном магнитном поле существенными становятся дисперсионные свойства фотона (см. раздел 2.2 и рис. 5.5). Такой фотон, рожденный в реакции  $e\gamma \rightarrow e\gamma$  с энергией и импульсом, удовлетворяющими соотношению  $\omega^2 - k_z^2 < 4m^2$  (магнитное поле направлено по оси  $z$ ), в процессе распространения в магнитном поле будет все время оставаться на дисперсионной ветви 1 и не сможет преодолеть зазор между ветвями 1 и 2 с рождением  $e^+e^-$ -пары, если величина магнитного поля  $B \gtrsim 0.1B_e$  [57, 88, 89], что заведомо выполняется в магнитарах. При достаточно больших  $q_\perp^2$  такой фотон может лишь перейти на асимптотически больших расстояниях в позитроний – связанное состояние  $e^+e^-$ -пары.

В связи с этим представляет интерес рассмотреть альтернативный механизм рождения  $e^+e^-$ -пар в магнитосфере магнитара. В качестве такого механизма может выступать комптоноподобный процесс  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$ , где под  $e$  в дальнейшем понимается электрон или позитрон. Основное преимущество такой реакции по сравнению с принятой моделью состоит в том, что рождение пары происходит практически мгновенно в точке взаимодействия начальных фотона и электрона (в действительности этот масштаб имеет порядок комптоновской длины волны электрона). При таком подходе эффект захвата фотона полем становится несущественным. Вместе с тем, с помощью реакции  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$  возможно за короткие времена заполнить ограниченную область достаточно плотной  $e^+e^-$ -плазмой, как, например, в процессе гигантской вспышки источника мягких повторяющихся гамма всплесков (SGR).

Процесс рождения электрон-позитронных пар в реакции  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$  описывается восемью диаграммами Фейнмана (см. рис. 5.6). Нетрудно видеть, что резонанс на виртуальном электроне имеет место только в  $s$ -канальных диаграммах (рис. 5.6 *a* и соответствующая диаграмма с перестановкой  $p' \leftrightarrow p_2$ ). Тем

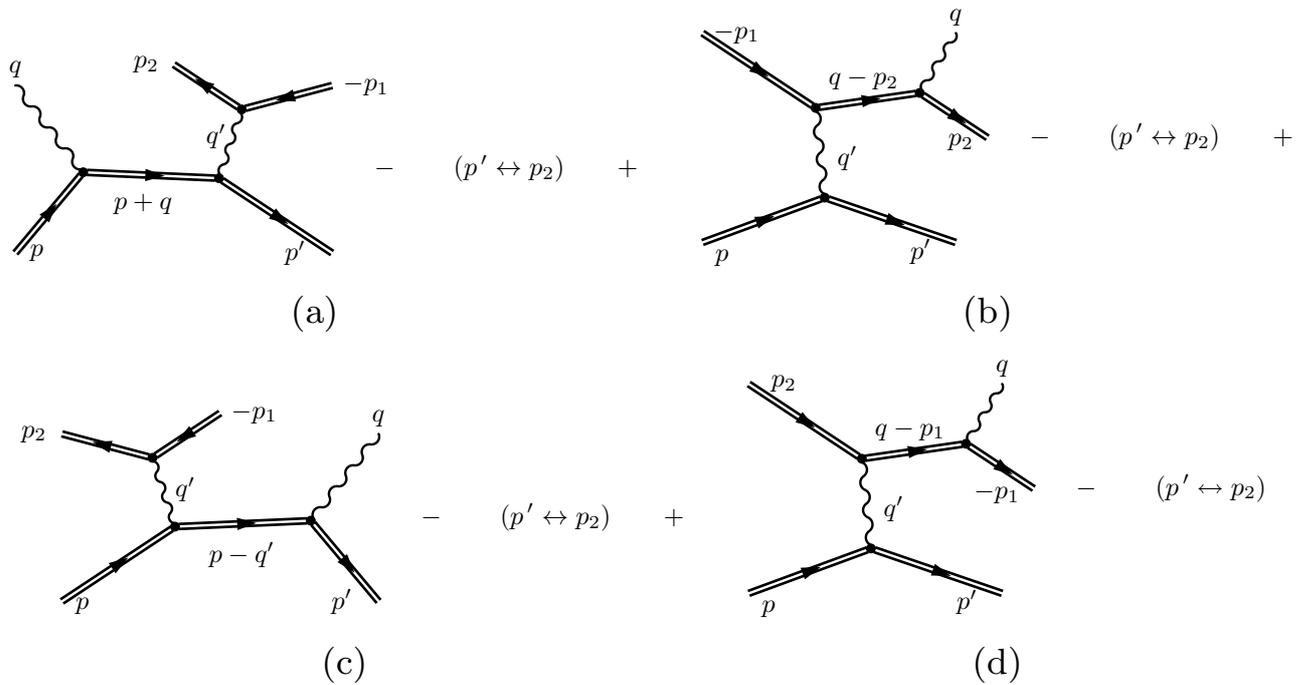


Рис. 5.6. Диаграммы Фейнмана для процесса  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+e^-$ . Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния учтено точно.

не менее, даже с учетом резонанса поставленная задача будет иметь достаточно громоздкий вид, поскольку заряженные фермионы могут занимать произвольные уровни Ландау. Однако в приложении к магнитарам данную проблему можно значительно упростить. Действительно, рассмотрим ситуацию, когда электрон, ускоренный в электрическом зазоре полярной шапки магнитара, сталкивается с гамма-квантом из равновесной термальной бани, образованной излучением рентгеновских фотонов с поверхности нейтронной звезды. В такой постановке задачи мы будем иметь следующую иерархию параметров:  $T^2 \ll m^2 \ll \beta \ll E^2$ . Кроме того, электрон, до ускорения находившийся на основном уровне Ландау ( $\ell = 0$ ), двигаясь вдоль силовой линии магнитного поля, остается все время на основном уровне. (Мы рассматриваем небольшую окрестность полярной шапки, где электрическое,  $\mathcal{E}$ , и магнитное  $\mathbf{B}$  поля коллинеарны и при этом  $|\mathcal{E}| \ll |\mathbf{B}|$  [16].) Не нарушая общности будем считать, что рассеянный электрон и электрон и позитрон пары также будут находиться на основном уровне Ландау с  $\ell' = n_1 = n_2 = 0$ . Действительно, как было показано в разделе 5.3.1, полученный результат для коэффициента поглощения электрона

не будет зависеть от состояния конечных частиц, а будет определяться только начальными состояниями электрона и фотона.

С учетом этого замечания  $S$  – матричный элемент процесса  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$  может быть записан в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\gamma e \rightarrow ee^+e^-} &= (ie)^3 \int d^4X d^4Y d^4Z \times \\ &\times \{ \bar{\Psi}_{p',0}^-(Y) \gamma_\beta \hat{S}(X, Y) \hat{A}(X) \Psi_{p,0}^-(X) \bar{\Psi}_{p_2,0}^-(Z) \gamma_\mu \Psi_{p_1,0}^+(Z) - \\ &- \bar{\Psi}_{p_2,0}^-(Y) \gamma_\beta \hat{S}(X, Y) \hat{A}(X) \Psi_{p,0}^-(X) \bar{\Psi}_{p',0}^-(Z) \gamma_\mu \Psi_{p_1,0}^+(Z) \} G_{\beta\mu}(Z - Y), \end{aligned} \quad (5.44)$$

где  $p^\mu = (E, \mathbf{p})$  – 4-импульс начального электрона,  $p'^\mu = (E', \mathbf{p}')$  – 4-импульс конечного электрона,  $p_2^\mu = (E_2, \mathbf{p}_2)$  и  $p_1^\mu = (E_1, \mathbf{p}_1)$  – 4-импульсы электрона и позитрона пары соответственно,  $X^\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ ,  $Y^\mu = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)$ ,  $Z^\mu = (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3)$ ,

$$A_\mu(X) = \frac{\varepsilon_\mu(q) e^{-i(qX)}}{\sqrt{2\omega V}}, \quad (5.45)$$

– квантованное поле начального фотона, несущего 4-импульс  $q^\mu = (\omega, \mathbf{k})$ .

$$\begin{aligned} G_{\beta\mu}(Z) &= \int \frac{d^4q'}{(2\pi)^4} e^{-i(q'Z)} \mathcal{G}_{\beta\mu}(q'), \\ \mathcal{G}_{\beta\mu}(q') &= \sum_{\lambda=1}^3 \frac{b_\beta^{(\lambda)} b_\mu^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \frac{-i}{q'^2 - \varkappa^{(\lambda)}(q')}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

– фурье-образ пропагатора виртуального фотона в базисе из 4-векторов  $b_\alpha^{(\lambda)}$ , определяемых согласно (2.1),  $\varkappa^{(\lambda)}(q')$  – собственные значения поляризационного оператора фотона, соответствующие векторам  $b_\alpha^{(\lambda)}$  (см., например, [57] и раздел 2.2),  $\Psi_{p,0}^\mp(X)$  – волновые функции электрона (позитрона) во внешнем магнитном поле, находящихся на основном уровне Ландау и определяемые формулами (Г.2) и (Г.3) приложения Г,  $\hat{S}(X, Y)$  – пропагатор электрона, определяемый формулами (Б.1) – (Б.3).

После интегрирования (5.44) по  $d^4X$ ,  $d^4Y$  и  $d^4Z$  мы получим

$$\mathcal{S}_{\gamma e \rightarrow ee^+e^-} = \frac{i(2\pi)^3 \delta^3(\dots) \mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow ee^+e^-}}{\sqrt{2\omega V 2E L_y L_z 2E' L_y L_z 2E_1 L_y L_z 2E_2 L_y L_z}}, \quad (5.47)$$

где  $\delta^3(\dots) \equiv \delta(P_0 - E' - E_1 - E_2)\delta(P_y - p'_y - p_{1y} - p_{2y})\delta(P_z - p'_z - p_{1z} - p_{2z})$ ,  
 $P_\alpha \equiv (p + q)_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 2, 3$ .

Амплитуда процесса  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$ , таким образом, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow ee^+e^-} &\simeq -i \frac{2\sqrt{2}e^3 m^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'_x}{q'^2 - \varkappa^{(2)}(q')} \exp\left[-\frac{i(q\varphi q')}{2eB}\right] \times \\
&\times \exp\left[-\frac{i(q_x - q'_x)(p_y + p'_y)}{2eB}\right] \exp\left[\frac{iq'_x(p_{1y} - p_{2y})}{2eB}\right] \times \\
&\times \exp\left[-\frac{2q_\perp'^2 + q_\perp^2}{4\beta}\right] \frac{1}{n!} \left(\frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{2\beta}\right)^n \times \\
&\times \frac{(pq')_\parallel [(pq)_\parallel + (p'q)_\parallel]}{(P_\parallel^2 - m^2 - 2eBn + iP_0\Gamma_n) \sqrt{q_\parallel^2 q_\parallel'^2 [(pp')_\parallel + m^2]}} \Big|_{\substack{q_\parallel'^\alpha = p_{1\parallel}^\alpha + p_{2\parallel}^\alpha \\ q'_y = p_{1y} + p_{2y}}} - \\
&-(p' \leftrightarrow p_2).
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Мнимая часть пропагатора электрона, связанная с полной шириной поглощения электрона соотношением (Б.4), вообще говоря, зависит от поляризованного состояния электрона, и только в пределе сильного поля,  $B \gg B_e$ , эта зависимость становится несущественной, что позволяет провести суммирование по поляризациям электрона и представить амплитуду в виде (5.48).

Для корректного описания рассматриваемого процесса вблизи резонанса необходимо также учесть полную ширину процесса поглощения электрона,  $\Gamma_n$ , основной вклад в которую будет давать переход  $e_n \rightarrow \gamma + e_{n'}$ . Исходя из результатов работ [22, 29], величина  $P_0\Gamma_n$  в пределе сильного поля и ультрарелятивистских электронов может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned}
P_0\Gamma_n &\simeq \alpha\beta \sum_{n'=0}^{n-1} \int_0^{(\sqrt{n}-\sqrt{n'})^2} \frac{dx}{\sqrt{(n+n'-x)^2 - 4nn'}} \times \\
&\times \{(n+n'-x)[\mathcal{I}_{n,n'-1}^2(x) + \mathcal{I}_{n-1,n'}^2(x)] - 4\sqrt{nn'}\mathcal{I}_{n,n'}(x)\mathcal{I}_{n-1,n'-1}(x)\}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Определяя стандартным путем коэффициент поглощения электрона в равновесном фотонном газе, имеющем температуру  $T$ , получим

$$W = \int \frac{\delta^3(\dots)|\mathcal{M}|^2}{2^5(2\pi)^6\omega EE'E_1E_2} \frac{d^3q}{e^{\omega/T} - 1} dp'_y dp'_z dp_{1y} dp_{1z} dp_{2y} dp_{2z}. \quad (5.50)$$

Как уже отмечалось, основной вклад в амплитуду будут давать области резонанса, так что мы можем заменить часть подынтегрального выражения в (5.50)  $\delta$ -функцией

$$\frac{1}{(P_{\parallel}^2 - m^2 - 2eBn)^2 + P_0^2\Gamma_n^2} \simeq \frac{\pi}{P_0\Gamma_n} \delta(P_{\parallel}^2 - m^2 - 2eBn). \quad (5.51)$$

Вводя новые переменные  $y = q_{\perp}^2/\beta$  и  $z = q'_z/E$ , получим в нашем приближении  $q_{\parallel}^2 \simeq 2\beta z$ ,  $(q - q')_{\parallel}^2 \simeq -m^2 z^2/(1 - z)$ . Кроме того, лидирующий вклад от уровней Ландау виртуального электрона будет определяться только уровнем с  $n = 1$ , вклады высших уровней оказываются подавлены температурой. В этом случае ширина поглощения электрона принимает особенно простой вид:  $P_0\Gamma_1 \simeq \alpha\beta(1 - e^{-1})$ . После интегрирования с  $\delta$ -функциями выражения (5.50), с учетом вышесказанного, получим

$$W \simeq \frac{\alpha^2 T}{2\pi(1 - e^{-1})} \left(\frac{m}{E}\right)^2 \ln\left(1 - e^{-\frac{\beta}{2ET}}\right)^{-1} \int_{2B_e/B}^1 dz \times \quad (5.52)$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{dy y e^{-y}}{z^2(2z - y)^2 + 4\alpha^2(B_e/B)^2 e^{-y}}.$$

Нетрудно видеть, что и здесь часть подынтегрального выражения можно приближенно заменить  $\delta$ -функцией:

$$\frac{1}{z^2(2z - y)^2 + 4\alpha^2(B_e/B)^2 e^{-y}} \simeq \frac{\pi e^{y/2}}{2\alpha} \frac{B}{B_e} \delta(2z^2 - yz), \quad (5.53)$$

т.е. в процессе  $e\gamma \rightarrow ee^+e^-$  в пределе сильного магнитного поля и ультрарелятивистских электронов, кроме резонанса на виртуальном электроне становится возможным резонанс на виртуальном фотоне. После подстановки (5.53) в (5.52)

и несложного интегрирования получим

$$W \simeq \frac{\alpha}{2} T \frac{B}{B_e} \left( \frac{m}{E} \right)^2 \ln \left( 1 - e^{-\frac{\beta}{2ET}} \right)^{-1}. \quad (5.54)$$

Вероятность рождения  $e^+e^-$ -пар в единицу времени как функция энергии начального электрона представлена на рис. 5.7.

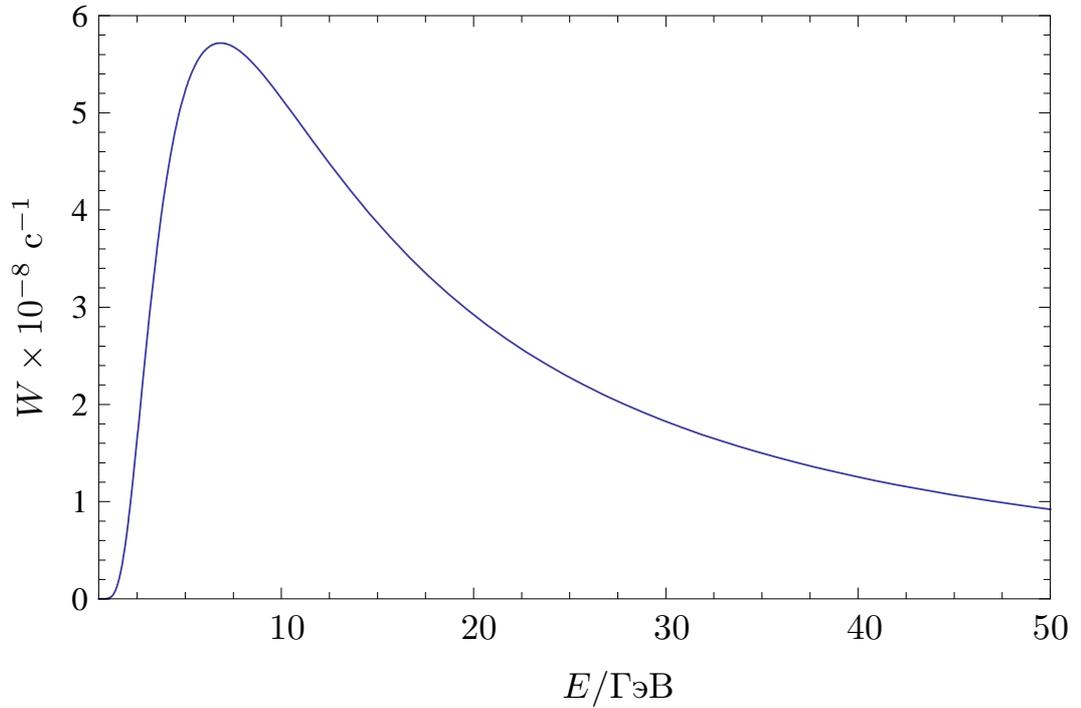


Рис. 5.7. Зависимость вероятности рождения электрон-позитронных пар в единицу времени от энергии начального электрона при  $B = 100B_e$  и  $T = 1$  кэВ.

Оценивая минимальную длину свободного пробега электрона с энергией  $E \sim 10^4 m$  при величинах магнитного поля и температуры таких же, как на рис. 5.7, получим  $\ell \simeq 57$  см, что оказывается много меньше величины зазора ( $\sim 100$ ) м. Вместе с тем изменение числа электронов в потоке за счет рождения пар может быть выражено через оптическую толщину  $\tau$  следующим образом:

$$N = N_0 \exp[-\tau] \simeq N_0 \exp \left[ - \int_0^h dx W \right], \quad (5.55)$$

где  $h$  – ширина электрического зазора,  $N_0$  – начальное число электронов в потоке.

Оценивая отношение  $N/N_0$  при  $h \sim 10^4$  см,  $E \sim 10^7 m$ , получим  $N/N_0 \simeq 0.99$ . Таким образом, рассматриваемый процесс дает возможность увеличивать количество  $e^+e^-$ -плазмы в области полярной шапки. Однако детальный количественный анализ развития каскада  $e^+e^-$ -пар требует решения кинетического уравнения, что выходит за рамки нашей задачи.

Наконец, необходимо сделать еще одно замечание. Резонансы на виртуальных электроне и фотоне соответствуют тому факту, что указанные частицы становятся реальными. Таким образом, рассматриваемый процесс схематично можно представить в виде совокупности трех подпроцессов:

- поглощение фотона электроном с рождением электрона на первом уровне Ландау,  $e_0 + \gamma \rightarrow e_1$ ;
- переход электрона с первого уровня на нулевой с испусканием жесткого  $\gamma$ -кванта,  $e_1 \rightarrow e_0 + \gamma$ ;
- рождение  $e^+e^-$ -пары жестким фотоном,  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ .

Парциальные вклады (branching fractions) последних двух реакций приближенно равны 1 и 1/2 соответственно (множитель 1/2 возникает от того, что в процессе  $\gamma \rightarrow e^+e^-$  участвует фотон только одной поляризации из двух возможных). Поэтому коэффициент поглощения электрона в процессе  $\gamma e \rightarrow ee^+e^-$  может быть легко получен из вероятности перехода  $\gamma + e_0 \rightarrow e_1$ , как  $W = W_{\gamma+e_0 \rightarrow e_1}/2$ . При этом вероятность  $W_{\gamma+e_0 \rightarrow e_1}$  может быть получена из результатов работы [29] и согласуется с нашим результатом (5.54).

## Заключение

В настоящей диссертации исследуются процессы с участием электронов, нейтрино и фотонов во внешней замагниченной среде с учетом резонансов на виртуальных электронах и фотонах. Основная цель состоит в изучении возможных эффектов, вызванных влиянием внешнего магнитного поля и плазмы на амплитуды процессов и на изменение дисперсионных свойств частиц.

В диссертации представлены следующие результаты

1. Впервые вычислены амплитуды обобщенного комптоноподобного процесса  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле с произвольной величиной напряженности, где  $f$  и  $f'$  – начальный и конечный фермионы, находящиеся на произвольных уровнях Ландау,  $j$  и  $j'$  – обобщенные токи скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов. Амплитуды представлены в явном калибровочно-и лоренц-инвариантном виде. Рассмотрены частные случаи сильного магнитного поля, когда реальные фермионы занимают основной уровень Ландау, и когерентного рассеяния тока  $j$  «вперед» без изменения состояний фермионов. Последний результат позволил обобщить имеющиеся в литературе выражения для амплитуд перехода  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  в магнитном поле на случай произвольно замагниченной плазмы.
2. Впервые получены простые выражения для коэффициентов поглощения фотона, обусловленные процессом  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  в сильно замагниченной плазме в двух предельных случаях зарядово-симметричной и холодной почти вырожденной плазмы с учетом дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов. Проведено сравнение коэффициентов поглощения фотонов в процессе расщепления фотона и в процессе комптоновского рассеяния.
3. Вычислена амплитуда процесса расщепления фотона  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , проанали-

зирована кинематика и найдены правила отбора по поляризациям. Для разрешенных каналов расщепления впервые получены соответствующие вероятности с учетом дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов в общем случае, когда распадающийся фотон распространяется под произвольным углом по отношению к направлению магнитного поля. Полученные результаты показывают, что присутствие плазмы, с одной стороны, существенным образом изменяет правила отбора по поляризациям по сравнению со случаем чистого магнитного поля. Обнаружен новый канал расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ , запрещенный в отсутствие плазмы. С другой стороны, из численных расчетов и полученных асимптотических формул следует, что горячая плазма оказывает подавляющее влияние на каналы  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ . Тем не менее, холодная зарядово-симметричная плазма в сочетании с сильным магнитным полем способна усилить вероятность расщепления по этим каналам по сравнению с чистым магнитным полем.

4. Рассмотрено влияние сильно замагниченной плотной плазмы на фотон-нейтринные процессы  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ ,  $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  и впервые получены инвариантные амплитуды реакций  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$  и  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ . В частном случае холодной плазмы впервые вычислены вклады рассматриваемых процессов в нейтринную светимость с учетом изменения дисперсионных свойств фотонов в замагниченной среде. Предложен методический прием вычисления светимости фотонейтринного процесса,  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ , через ширину поглощения фотона. На основе изложенной методики показано, что в случае релятивистской плазмы выражение для нейтринной светимости за счет процесса  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$  существенно модифицируется по сравнению с имеющимися в литературе результатами. Показано, что в случае холодной плазмы вклад в нейтринную излучательную способность процесса  $\gamma \gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$  будет сильно подавлен по сравнению со вкладом фотонейтринного процесса и

процесса конверсии фотона. Исходя из возможной модификации кривой охлаждения нейтронной звезды за счет изменения нейтринной светимости в сильном магнитном поле, делается предположение об ограничении на величину индукции магнитного поля во внешней коре магнитара.

5. Впервые рассмотрено влияние замагниченной плазмы на процесс резонансного фоторождения аксионов на заряженных компонентах среды,  $i \rightarrow f + a$ . Показано, что аксионная светимость в области резонанса за счет всевозможных реакций с участием частиц среды однозначно выражается через светимость перехода фотон  $\rightarrow$  аксион. Найдено число аксионов, рождаемых равновесным реликтовым излучением в магнитосфере магнитара. Показано, что в противовес ранее сделанным в литературе выводам, рассмотренный резонансный механизм не эффективен для производства холодной скрытой массы.
6. Проведено исследование комптоноподобного процесса  $\gamma e^- \rightarrow e^- e^+ e^-$  рождения электрон-позитронной пары при взаимодействии ультрарелятивистского электрона с мягким рентгеновским фотоном в окрестности полярной шапки магнитара. Для процесса  $\gamma e^- \rightarrow e^- e^+ e^-$  впервые получено простое аналитическое выражение для коэффициента поглощения электрона. Получена оценка возможной эффективности процесса рождения пар для генерации в магнитосфере электрон-позитронной плазмы.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [46, 128, 130, 134, 135, 151, 152, 154, 155, 158, 161, 164, 206].

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту Александру Васильевичу Кузнецову за постоянное внимание к работе, обсуждение полученных результатов, советы и помощь, оказанные ему при выполнении диссертации. Автору приятно поблагодарить Н.В. Михеева, М.В. Чистякова, А.А.

Гвоздева, А.Я. Пархоменко, Е.Н. Нарынскую и И.С. Огнева за поддержку. Автор благодарит также проф. В.А. Рубакова за полезные обсуждения.

## Приложение А

### Результаты для $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$

Факторы  $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ , входящие в (1.24), приведены для случая отрицательного заряда фермиона,  $\eta = -1$  и могут быть получены с использованием волновых функций (1.12). Используются следующие обозначения:  $P_\alpha = (p + q)_\alpha$ ,  $P'_\alpha = (p - q)_\alpha$ ,  $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}(q_\perp^2/(2\beta))$  и  $\mathcal{I}'_{n,\ell'} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell'}(q'^2/(2\beta))$ .

1. В случае, когда  $j$  и  $j'$  являются скалярными токами ( $k, k' = S$ ) вычисления дают

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{++} = & g_S g'_S j_S j'_S \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\ & + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - 2\beta\sqrt{n}\mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{+-} = & i g_S g'_S j_S j'_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{-+} = & -i g_S g'_S j_S j'_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SS}^{-} = & gsg'_S j_S j'_S \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{S'S}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются следующей заменой:  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .

2. В случае, когда  $j$  является скалярным током, а  $j'$  представляет собой псевдоскалярный ток ( $k = S$ ,  $k' = P$ ), мы получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PS}^{++} = & -gsg'_P j_S j'_P \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SP}^{++} = & gsg'_P j_S j'_P \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \right. \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] \right\}; \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PS}^{+-} = & -igsg'_P j_S j'_P \left\{ \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SP}^{+-} = & \text{igs}g'_P j_S j'_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. & (\text{A.8}) \\
& + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PS}^{-+} = & \text{igs}g'_P j_S j'_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. & (\text{A.9}) \\
& + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SP}^{-+} = & -\text{igs}g'_P j_S j'_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. & (\text{A.10}) \\
& + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PS}^{-\bar{-}} = & -g_S g'_P j_S j'_P \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. & (\text{A.11}) \\
& - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SP}^{-\bar{-}} = & g_S g'_P j_S j'_P \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \right. & (\text{A.12}) \\
& - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& \left. - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] \right\}.
\end{aligned}$$

3. В случае, когда  $j$  является скалярным током, а  $j'$  представляет собой векторный ток ( $k = S, k' = V$ ), мы получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^{++} = & g_S g'_V j_S \left\{ -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j'_V) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^{++} = & g_S g'_V j_S \left\{ -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j'_V) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)] \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^{+-} = & -igs g'_V j_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_V) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta \sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^{+-} = & igs g'_V j_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_V) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] + \\
& + 2\beta \sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^{-+} = & -\text{igs}g'_V j_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_V) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta \sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^{-+} = & \text{igs}g'_V j_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_V) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + 2\beta \sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^- = g_S g_V' j_S \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & \quad (\text{A.19}) \\
\times \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j_V') \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - & \\
-2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j_V') \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + & \\
+2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j_V') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - & \\
-\sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} \left[ (q'\Lambda j_V') + i(q'\varphi j_V') \right] \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - \right. & \\
-2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (q'\Lambda j_V') - i(q'\varphi j_V') \right] \times & \\
\times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\}. &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^- = g_S g_V' j_S \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & \quad (\text{A.20}) \\
\times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j_V') \right] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} - & \\
-2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j_V') \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + & \\
+2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j_V') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - & \\
-\sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (q'\Lambda j_V') + i(q'\varphi j_V') \right] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. & \\
-\sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} \left[ (q'\Lambda j_V') - i(q'\varphi j_V') \right] \times & \\
\times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell'n}\mathcal{K}_3\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \left. \right\}. &
\end{aligned}$$

4. В случае, когда  $j$  является скалярным током, а  $j'$  представляет собой псевдовекторный ток ( $k = S$ ,  $k' = A$ ), мы получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^{++} = & g_S g'_A j_S \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \quad (A.21) \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j'_A) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + \left. \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_4\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^{++} = & g_S g'_A j_S \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \quad (A.22) \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j'_A) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + \left. \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_4\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_4\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^{+-} = & \text{igs}g'_A j_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n}(\mathcal{K}_1j'_A) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{n\ell}\mathcal{K}_3\mathcal{I}'_{n,\ell'-1} + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] \\
& + 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^{+-} = & -\text{igs}g'_A j_S \left\{ \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{2\beta n}(\mathcal{K}_1j'_A) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell'} - 2\beta\sqrt{n\ell'}\mathcal{K}_3\mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3\mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^{-+} = & \text{igs}g'_A j_S \left\{ \sqrt{2\beta\bar{\ell}}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j'_A) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\bar{\ell}} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\bar{\ell}} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\}; \tag{A.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^{-+} = & -\text{igs}g'_A j_S \left\{ \sqrt{2\beta\bar{\ell}}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j'_A) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta\sqrt{\bar{\ell}} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\bar{\ell}'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\}; \tag{A.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^- = g_S g'_A j_S \bigg\{ & - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \tag{A.27} \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j'_A) \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} \left[ (q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A) \right] \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& \left. + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A) \right] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \bigg\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^- = g_S g'_A j_S \bigg\{ & - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \tag{A.28} \\
& \times \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j'_A) \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A) \right] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& \left. - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} \left[ (q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A) \right] \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \bigg\};
\end{aligned}$$

5. В случае, когда  $j$  и  $j'$  являются псевдоскалярными токами ( $k, k' = P$ ), вычисления дают

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{++} = & -g_P g'_P j_P j'_P \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\ & + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{+-} = & -ig_P g'_P j_P j'_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{-+} = & ig_P g'_P j_P j'_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{--} = & -g_P g'_P j_P j'_P \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\ & + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & \left. - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{PP}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются следующей заменой:  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .

6. В случае, когда  $j$  является псевдоскалярным током, а  $j'$  представляет собой векторный ток ( $k = P$ ,  $k' = V$ ), мы получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^{++} = & -g_P g'_V j_P \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \times \quad (\text{A.33}) \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j'_V) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + \left. \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_4\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^{++} = & g_P g'_V j_P \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \times \quad (\text{A.34}) \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j'_V) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + \left. \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_4\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] \\
& + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_4\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^{+-} = & -ig_P g'_V j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j'_V) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^{+-} = & -ig_P g'_V j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j'_V) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} - \right. \\
& - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \left. \right] + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^{-+} = & -ig_P g'_V j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j'_V) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^{-+} = & -ig_P g'_V j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j'_V) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \left. \right] + \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^- = & -g_P g_V' j_P \left\{ - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & (A.39) \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j_V') \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - \\
& -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j_V') \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& -2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j_V') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j_V') + i(q'\varphi j_V')] [(M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1}] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j_V') - i(q'\varphi j_V')] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_4\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^- = & g_P g_V' j_P \left\{ - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & (A.40) \\
& \times \left[ (P'\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j_V') \right] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} - \\
& -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\varphi}j_V')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j_V')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j_V') \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& -2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j_V') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j_V') + i(q'\varphi j_V')] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& \left. - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_4\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j_V') - i(q'\varphi j_V')] \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_4\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

7. В случае, когда  $j$  является псевдоскалярным током, а  $j'$  представляет собой псевдовекторный ток ( $k = P$ ,  $k' = A$ ), мы получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^{++} = & -g_P g'_A j_P \left\{ -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \times \quad (A.41) \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j'_A) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^{++} = & g_P g'_A j_P \left\{ -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \times \quad (A.42) \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j'_A) \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^{+-} = & \text{ig}_P g'_A j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_A) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^{+-} = & \text{ig}_P g'_A j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_A) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \right. \\
& 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.44}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^{-+} = & \text{ig}_P g'_A j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_A) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta \sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.45}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^{-+} = & \text{ig}_P g'_A j_P \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_A) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + 2\beta \sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \left. \right] + \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left. \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.46}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^- = & -g_P g'_A j_P \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & (A.47) \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \\
& -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& +2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j'_A) \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& -\sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] [(M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \\
& -2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^- = & g_P g'_A j_P \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & (A.48) \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \\
& -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \\
& +2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j'_A) \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& -\sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& \left. -\sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell'n}\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

8. В случае, когда  $j$  и  $j'$  являются векторными токами ( $k, k' = V$ ), вычисления дают

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{++} = & g_V g'_V \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1j'_V) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1P) - \right. \right. \\
& \left. \left. - m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (j_V\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \quad (\text{A.49}) \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1j'_V) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1P) + m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + \right. \\
& \left. + (j_V\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n} [(j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (j_V\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 - \right. \\
& \left. - m_f(\mathcal{K}_1j_V) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j_V) + i(q'\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + m_f(\mathcal{K}_1j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j_V\Lambda j'_V) + i(j_V\varphi j'_V)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j_V\Lambda j'_V) - \\
& - i(j_V\varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j_V) \times \\
& \times \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j'_V) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] + \\
& + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \left. \times \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{+-} = & ig_V g'_V \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2 j'_V) - \right. \right. \quad (\text{A.50}) \\
& - (j_V \tilde{\Lambda} j'_V)(\mathcal{K}_2 P) - m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V)\mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi} j'_V)\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2 j'_V) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_V)(\mathcal{K}_2 P) + \right. \\
& + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V)\mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi} j'_V)\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V)\mathcal{K}_4 + \\
& + (j_V \tilde{\varphi} j'_V)\mathcal{K}_3] \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 - \right. \\
& - m_f(\mathcal{K}_2 j_V) \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j'_V) \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)] \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2 j_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j_V) + i(q'\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_f(\mathcal{K}_2 j'_V) \Big] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_V \Lambda j'_V) + i(j_V \varphi j'_V)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(j_V \Lambda j'_V) - i(j_V \varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \\
& - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j_V) \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] + \\
& + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j'_V) \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] - \\
& - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \right. \\
& \left. - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{-+} = & ig_V g'_V \Big\{ - \sqrt{2\beta\ell} (M_\ell + m'_f) \left[ (P\tilde{\Lambda} j'_V)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P\tilde{\Lambda} j_V)(\mathcal{K}_2 j'_V) - \right. \\
& \left. - (j_V \tilde{\Lambda} j'_V)(\mathcal{K}_2 P) + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V)\mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi} j'_V)\mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} + \sqrt{2\beta\ell'} \times \text{(A.51)} \\
& \times (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda} j'_V)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P\tilde{\Lambda} j_V)(\mathcal{K}_2 j'_V) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_V)(\mathcal{K}_2 P) - \right. \\
& \left. - m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V)\mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi} j'_V)\mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - \sqrt{2\beta n} \left[ (j_V \tilde{\Lambda} j'_V)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + (j_V \tilde{\varphi} j'_V)\mathcal{K}_3 \right] \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] + \\
& + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda} j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi} j_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2 j_V) \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \frac{(q\Lambda j'_V) - i(q\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times [(q'\Lambda j_V) + i(q'\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + \\
& + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(j_V\Lambda j'_V) + i(j_V\varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_V\Lambda j'_V) - i(j_V\varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2j_V) \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2j'_V) \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \left. \right] + \\
& + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_V) - i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_V) + i(q'\varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \left. \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^- = g_V g'_V \Big\{ & (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1j'_V) - \right. \\
& - (j_V\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1P) + m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (j_V\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4] \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1j'_V) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_V)(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + \right. \\
& \left. + (j_V\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n} [(j_V\tilde{\Lambda}j'_V)\mathcal{K}_3 + (j_V\tilde{\varphi}j'_V)\mathcal{K}_4] \times \quad (\text{A.52})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} \mathcal{I}_{n, \ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) [(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)] \left[ (P \tilde{\Lambda} j_V) \mathcal{K}_3 - (P \tilde{\varphi} j_V) \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j_V) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n, \ell-1} \mathcal{I}_{n, \ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)] \left[ (P \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_3 + (P \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + m_f (\mathcal{K}_1 j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q \Lambda j'_V) - i(q \varphi j'_V)] \left[ (P \tilde{\Lambda} j_V) \mathcal{K}_3 - \right. \\
& \left. - (P \tilde{\varphi} j_V) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q' \Lambda j_V) + \\
& + i(q' \varphi j_V)] \left[ (P \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_3 + (P \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j'_V) \right] \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j_V \Lambda j'_V) + i(j_V \varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \\
& + (M_\ell + m_f) (M_{\ell'} + m_f) [(j_V \Lambda j'_V) - i(j_V \varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \times \\
& \times \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j_V) \left[ (M_\ell + m_f) (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n, \ell-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \left. \right] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j'_V) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + (M_\ell + m_f) (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \left. \right] + \\
& + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \right. \\
& \left. + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{VV}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются следующей заменой:  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $q_\alpha \leftrightarrow -q'_\alpha$ ,  $j_V \alpha \leftrightarrow j'_V \alpha$ ,  $\mathcal{I}_{m, n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m, n}$ .

9. В случае, когда  $j$  является векторным током, а  $j'$  представляет собой псевдовекторный ток ( $k = V$ ,  $k' = A$ ), мы получим

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^{++} = & -g_V g'_A \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2j'_A) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2P) + \right. \right. \\
& + m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A) \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_2j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2j'_A) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2P) - m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \left. \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \quad (A.53) \\
& \times [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j_V) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 - \right. \\
& - m_f(\mathcal{K}_2j_V) \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j_V) + i(q'\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A) \times \right. \\
& \times \mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(j_V\Lambda j'_A) + i(j_V\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j_V\Lambda j'_A) - i(j_V\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j_V) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f) \times \right. \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_A) \left[ (M_\ell + m_f) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \Big] - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 \left[ \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \\
& \left. \times \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^{++} = & -g_V g'_A \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P'\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 P') - \right. \right. \\
& \left. \left. - m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell} - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \quad (\text{A.54}) \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P'\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 P') + m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - \right. \\
& \left. - (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} + 2\beta\sqrt{n} [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell} - \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_{\perp}^2}} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j'_A) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_{\perp}^{\prime 2}}} (M_{\ell} + m_f) [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 + (P'\tilde{\varphi}j_V) \times \right. \\
& \times \mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j_V) \Big] \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_{\perp}^{\prime 2}}} (M_{\ell} + m_f) [(q'\Lambda j_V) - i(q'\varphi j_V)] \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2 j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_{\perp}^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 + (P'\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2 j_V) \right] \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell} - \\
& \left. - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j_V \Lambda j'_A) - i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j_V \Lambda j'_A) + i(j_V \varphi j'_A)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j'_A) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \right. \\
& \times \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j_V) \left[ (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^{+-} = & -ig_V g'_A \left\{ -\sqrt{2\beta\ell'} (M_{\ell} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1 j'_A) - \right. \right. \\
& \left. \left. - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 P) - m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} \times \quad (\text{A.55}) \right. \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 P) - m_f \times \right. \\
& \times [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + \\
& + (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left[ (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_1 j_V) \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_{\perp}^2}} [(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_{\perp}^2}} [(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_V) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1 j_V) \Big] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j_V) + i(q' \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ (P \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (P \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1 j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} + \sqrt{2\beta \ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(j_V \Lambda j'_A) + i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(j_V \Lambda j'_A) - i(j_V \varphi j'_A)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_1 j_V) \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \left. \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] - 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_1 j'_A) \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \right. \\
& \times \left. \frac{(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\
& \times \left. \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \left[ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \right. \\
& \times \left. \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\
& \times \left. \left. \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^{\pm} = -ig_V g'_A \Big\{ & -\sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P' \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_1 j_V) + (P' \tilde{\Lambda} j_V)(\mathcal{K}_1 j'_A) - \right. \\
& - (j_V \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_1 P') + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 - (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] \Big] \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell} + \sqrt{2\beta \ell} \times \quad (\text{A.56}) \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P' \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_1 j_V) + (P' \tilde{\Lambda} j_V)(\mathcal{K}_1 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_1 P') + m_f \times \right. \\
& \times \left. [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 - (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 - \\
& - (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - \right. \\
& \left. - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)] \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 + \right. \\
& \left. + (P'\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j_V) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j_V) - i(q'\varphi j_V)] \times \\
& \times \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 + (P'\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j_V) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_V\Lambda j'_A) - i(j_V\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(j_V\Lambda j'_A) + i(j_V\varphi j'_A)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j'_A) \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j_V) \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \left. \times \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] \left. \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^{-+} = & -ig_V g'_A \left\{ -\sqrt{2\beta\ell} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1j'_A) - \right. \right. \\
& - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1j'_A) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1P) + \right. \\
& + m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} [(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + \\
& + (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j_V) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 - \right. \\
& - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j_V) \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j_V) + i(q'\varphi j_V)] \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(j_V\Lambda j'_A) + i(j_V\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_V\Lambda j'_A) - i(j_V\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j_V) \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j'_A) \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& \left. + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^- = -ig_V g'_A \Big\{ & -\sqrt{2\beta\ell} (M_\ell + m'_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 j_V) + (P'\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1 j'_A) \right. \\
& - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 P') + m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \Big] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 j_V) + (P'\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_1 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 P') - \right. \\
& - m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \Big] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - \\
& - (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1 j'_A) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 + \right. \\
& \left. + (P'\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1 j_V) \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j_V) - i(q'\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1 j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \\
& - \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_A) + i(q\varphi j'_A)] \left[ (P'\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_3 + (P'\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1 j_V) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(j_V \Lambda j'_A) - i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_V \Lambda j'_A) + i(j_V \varphi j'_A)] \times
\end{aligned}
\tag{A.58}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell} - \\
& - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1 j'_A) \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell} + \right. \\
& \left. + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} \right] - \\
& - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1 j_V) \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} + \right. \\
& \left. + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell} \right] - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \times \\
& \times \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} + \right. \\
& \left. + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell} \right] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^- &= -g_V g'_A \Big\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2 j'_A) \right. \\
& - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 P) - m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 j_V) + (P\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 P) + m_f [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} + 2\beta\sqrt{n} [(j_V \tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j_V) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - \right. \\
& \left. - m_f(\mathcal{K}_2 j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_V)\mathcal{K}_4 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(P\tilde{\varphi}j_V)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j_V) \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f)[(q'\Lambda j_V) + \\
& + i(q'\varphi j_V)] \Big[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times [(j_V\Lambda j'_A) + i(j_V\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f)[(j_V\Lambda j'_A) - i(j_V\varphi j'_A)][(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j_V) \Big[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j'_A) \Big[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 \times \\
& \times \Big[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) - i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^- &= -g_V g'_A \Big\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \Big[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2j_V) + (P'\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2j'_A) - \\
& - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2P') + m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \Big[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2j_V) + (P'\tilde{\Lambda}j_V)(\mathcal{K}_2j'_A) - (j_V\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2P') - m_f[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - \\
& - (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j_V\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (j_V\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3] \times \quad (\text{A.60}) \\
& \times \Big[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \Big] + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j_V) + i(q\varphi j_V)] \Big[ (P'\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 - (P'\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \Big] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_{\perp}^{\prime 2}}} (M_{\ell'} + m_f) [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] \left[ (P' \tilde{\Lambda} j_V) \mathcal{K}_4 + (P' \tilde{\varphi} j_V) \times \right. \\
& \times \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j_V) \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_{\perp}^{\prime 2}}} (M_{\ell'} + m_f) [(q' \Lambda j_V) - i(q' \varphi j_V)] \times \\
& \times \left[ (P' \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 - (P' \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j'_A) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_{\perp}^2}} (M_{\ell} + m_f) \times \\
& \times [(q \Lambda j'_A) + i(q \varphi j'_A)] \left[ (P' \tilde{\Lambda} j_V) \mathcal{K}_4 + (P' \tilde{\varphi} j_V) \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j_V) \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \\
& - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(j_V \Lambda j'_A) - i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + \\
& + (M_{\ell} + m_f) (M_{\ell'} + m_f) [(j_V \Lambda j'_A) + i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j'_A) \left[ (M_{\ell} + m_f) (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \\
& - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j_V) \left[ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& - (M_{\ell} + m_f) (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] - \\
& - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_4 \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. - \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \frac{(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

10. В случае, когда  $j$  и  $j'$  являются псевдовекторными токами ( $k, k' = A$ ), вычисления дают

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{++} = g_A g'_A \bigg\{ & 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1j_A) + (P\tilde{\Lambda}j_A)(\mathcal{K}_1j'_A) - \right. & (A.61) \\
& - (j_A\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1P) + m_f[(j_A\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (j_A\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \bigg] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1j_A) + (P\tilde{\Lambda}j_A)(\mathcal{K}_1j'_A) - (j_A\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1P) - \right. \\
& - m_f[(j_A\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (j_A\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \bigg] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j_A\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + \\
& + (j_A\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4] \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_A)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& + m_f(\mathcal{K}_1j_A) \bigg] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)] \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_A)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j_A) + i(q'\varphi j_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_4 - \right. \\
& - m_f(\mathcal{K}_1j'_A) \bigg] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f)[(j_A\Lambda j'_A) + i(j_A\varphi j'_A)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times [(j_A\Lambda j'_A) - i(j_A\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j_A) \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& \left. + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& -\sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j'_A) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \right. \\
& \left. + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \right. \\
& \left. + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{+-} = ig_A g'_A \Big\{ & \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 j_A) + (P\tilde{\Lambda}j_A)(\mathcal{K}_2 j'_A) - \right. \quad (\text{A.62}) \\
& \left. - (j_A \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_2 P) + m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_2 j_A) + (P\tilde{\Lambda}j_A)(\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_A \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_2 P) - \right. \\
& \left. - m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 + \\
& \left. + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A) \mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi} j_A) \mathcal{K}_3 + \right. \\
& \left. + m_f (\mathcal{K}_2 j_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A) \mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + (P\tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)] \times \\
& \times \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A) \mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi} j_A) \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (M_\ell + m_f) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j_A) + i(q' \varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \left[ (P \tilde{\Lambda} j_A') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j_A') \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j_A') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_A \Lambda j_A') + i(j_A \varphi j_A')] [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} + \sqrt{2\beta \ell'} (M_{\ell} + m_f) [(j_A \Lambda j_A') - i(j_A \varphi j_A')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j_A) \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \frac{(q' \Lambda j_A') - i(q' \varphi j_A')}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \left. \frac{(q' \Lambda j_A') + i(q' \varphi j_A')}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] + 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j_A') \left[ \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \times \right. \\
& \times \left. \frac{(q \Lambda j_A) - i(q \varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_A) + i(q \varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \right. \\
& \times \left. \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \left[ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q \Lambda j_A) - i(q \varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q' \Lambda j_A') - i(q' \varphi j_A')}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \times \right. \\
& \times \left. \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j_A) + i(q \varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \right. \\
& \times \left. \left. \frac{(q' \Lambda j_A') + i(q' \varphi j_A')}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right] \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{-+} = i g_A g_A' & \left\{ -\sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell} + m_f') \left[ (P \tilde{\Lambda} j_A') (\mathcal{K}_2 j_A) + (P \tilde{\Lambda} j_A) (\mathcal{K}_2 j_A') - \right. \right. \text{(A.63)} \\
& \left. \left. - (j_A \tilde{\Lambda} j_A') (\mathcal{K}_2 P) - m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j_A') \mathcal{K}_4 + (j_A \tilde{\varphi} j_A') \mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} + \sqrt{2\beta \ell'} \times \right. \\
& \times (M_{\ell} + m_f) \left[ (P \tilde{\Lambda} j_A') (\mathcal{K}_2 j_A) + (P \tilde{\Lambda} j_A) (\mathcal{K}_2 j_A') - (j_A \tilde{\Lambda} j_A') (\mathcal{K}_2 P) + \right. \\
& \left. + m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j_A') \mathcal{K}_4 + (j_A \tilde{\varphi} j_A') \mathcal{K}_3] \right] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - \sqrt{2\beta n} [(j_A \tilde{\Lambda} j_A') \mathcal{K}_4 + \\
& \left. + (j_A \tilde{\varphi} j_A') \mathcal{K}_3] \left[ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell} - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} [(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)] [(P\tilde{\Lambda}j_A)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j_A)] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + \right. \\
& \left. + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j'_A) - i(q\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} [(P\tilde{\Lambda}j_A)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j_A)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} [(q'\Lambda j_A) + i(q'\varphi j_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j'_A)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j'_A) \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'} (M_{\ell} + m_f) [(j_A\Lambda j'_A) + i(j_A\varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j_A\Lambda j'_A) - i(j_A\varphi j'_A)] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2j_A) \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2j'_A) \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \left. \right] + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \left[ (M_{\ell} + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \times \\
& \times \left. \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}^{\prime 2}}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^- = g_A g'_A \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 j_A) + (P\tilde{\Lambda}j_A)(\mathcal{K}_1 j'_A) - \right. \right. & \quad (\text{A.64}) \\
\left. \left. - (j_A \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_1 P) - m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \times \right. \\
\times \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A)(\mathcal{K}_1 j_A) + (P\tilde{\Lambda}j_A)(\mathcal{K}_1 j'_A) - (j_A \tilde{\Lambda} j'_A)(\mathcal{K}_1 P) + m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + \right. & \\
\left. \left. + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{n} [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] \times & \\
\times \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp'^2}} \times & \\
\times (M_\ell + m_f) [(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A) \mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j_A) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j_A) \right] \times & \\
\times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q \Lambda j_A) - i(q \varphi j_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A) \mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A) \mathcal{K}_4 - \right. & \\
\left. - m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q \Lambda j'_A) - i(q \varphi j'_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j_A) \mathcal{K}_3 - \right. & \\
\left. - (P\tilde{\varphi}j_A) \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q' \Lambda j_A) + & \\
+ i(q' \varphi j_A)] \left[ (P\tilde{\Lambda}j'_A) \mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j'_A) \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + & \\
+ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(j_A \Lambda j'_A) + i(j_A \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + & \\
+ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j_A \Lambda j'_A) - i(j_A \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \times & \\
\times \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j_A) \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. & \\
\times \frac{(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + & \\
+ \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j'_A) \left[ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{-(q \Lambda j_A) + i(q \varphi j_A)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f) \times \right. &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \frac{(q\Lambda j_A) - i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) - i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& \left. + \sqrt{\ell'} (M_{\ell} + m_f) \frac{(q\Lambda j_A) + i(q\varphi j_A)}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \frac{(q'\Lambda j'_A) + i(q'\varphi j'_A)}{\sqrt{q_{\perp}'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{AA}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются следующей заменой:  $P_{\alpha} \rightarrow P'_{\alpha}$ ,  $q_{\alpha} \leftrightarrow -q'_{\alpha}$ ,  $j_{A\alpha} \leftrightarrow j'_{A\alpha}$   $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .

## Приложение Б

### Пропагатор фермиона во внешнем постоянном однородном магнитном поле

Для вычисления обобщенной амплитуды перехода  $jf \rightarrow j'f'$  и анализа возможных резонансных эффектов удобно использовать пропагатор фермиона в виде суммы по уровням Ландау [23, 217]. Его можно представить в следующем виде:

$$\hat{S}(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n(X, X'), \quad (\text{Б.1})$$

где вклад  $n$ -го уровня Ландау может быть получен из решений уравнения Дирака (1.12) и записан в форме:

$$\hat{S}_n(X, X') = \sum_{s=\pm 1} \hat{S}_n^s(X, X'), \quad (\text{Б.2})$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_n^s(X, X') &= \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \frac{e^{-i(p(X-X')_{\parallel} + ip_y(X_2-X'_2))}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 - \Re_{\Sigma}^s(p) + i\Im_{\Sigma}^s(p)} \phi_{pn}^s(X_1) \bar{\phi}_{pn}^s(X'_1). \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

Возникающие в знаменателе пропагатора (Б.3) реальная,  $\Re_{\Sigma}^s(p)$ , и мнимая,  $\Im_{\Sigma}^s(p)$ , части собственного значения массового оператора фермиона, соответствующие поляризованному состоянию  $s$ , есть результат вычисления радиационных поправок к массе фермиона в замагниченной плазме. В частности, мнимая часть  $\Im_{\Sigma}^s(p)$  может быть получена из результатов работ [24, 61] и представлена в следующем виде:

$$\Im_{\Sigma}^s(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^s, \quad (\text{Б.4})$$

где  $\Gamma_n^s$  – полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризованном состоянии  $s$  и занимающего  $n$ -й уровень Ландау.

Реальная часть массового оператора,  $\Re_{\Sigma}^s(p)$ , определяет изменение (по сравнению с вакуумным) закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. Однако, как показывает анализ, в магнитных полях, характерных для большинства известных астрофизических объектов ( $B \lesssim 10^{16}$  Гс), поправка к массе фермиона, обусловленная вкладом  $\Re_{\Sigma}^s(p)$ , оказывается несущественной [22, 146].

Вне резонансной области можно просуммировать (Б.2) по поляризационным состояниям фермионов. В результате получим:

$$\begin{aligned} \hat{S}_n(X, X') &= \frac{i}{2^n n!} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(-\beta \frac{X_1^2 + X_1'^2}{2}\right) \times & (Б.5) \\ &\times \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p(X-X'))_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - m_f^2 - 2\beta n + i\varepsilon} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{p_y^2}{\beta} - p_y [X_1 + X_1' - i(X_2 - X_2')]\right\} \times \\ &\times \left\{ [(p\gamma)_{\parallel} + m] [\Pi_- H_n(\xi) H_n(\xi') + \Pi_+ 2n H_{n-1}(\xi) H_{n-1}(\xi')] + \right. \\ &\left. + i 2n \sqrt{\beta} \gamma^1 [\Pi_- H_{n-1}(\xi) H_n(\xi') - \Pi_+ H_n(\xi) H_{n-1}(\xi')] \right\}, \end{aligned}$$

где  $\xi$  и  $\xi'$  определены следующим образом:

$$\xi = \sqrt{\beta} \left( X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right), \quad \xi' = \sqrt{\beta} \left( X_1' - \eta \frac{p_y}{\beta} \right), \quad (Б.6)$$

$H_n(x)$  – полиномы Чебышёва-Эрмита [150],  $\Pi_{\pm} = (1 \pm i\gamma_1\gamma_2)/2$  (свойства матриц  $\Pi_{\pm}$  даны в приложении Д).

Для расчета амплитуды процесса расщепления фотона в сильно замагниченной плазме оказывается удобным использовать представление пропагатора  $S(X, X')$  в формализме собственного времени Фока [218]:

$$S(X, X') = e^{-i\beta(X_1+X_1')(X_2-X_2')/2} \hat{S}(X - X'), \quad (Б.7)$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{S}(Y) = & -\frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\text{th } \tau} \int \frac{dp_0 dp_z}{(2\pi)^2} \left\{ [(p\gamma)_\parallel + m_f] \Pi_-(1 + \text{th } \tau) + \right. & (\text{Б.8}) \\
& + [(p\gamma)_\parallel + m_f] \Pi_+(1 - \text{th } \tau) - (Y\gamma)_\perp \frac{i\beta}{2 \text{th } \tau} (1 - \text{th}^2 \tau) \left. \right\} \times \\
& \times \exp \left( -\frac{\beta Y_\perp^2}{4 \text{th } \tau} - \frac{\tau(m_f^2 - p_\parallel^2)}{\beta} - i(pY)_\parallel \right)
\end{aligned}$$

– трансляционно инвариантная часть пропагатора. Формулы (Б.7) и (Б.8) легко получить, если проинтегрировать (Б.5) по  $dp_y$ , а затем выполнить суммирование полученного результата по уровням Ландау с использованием производящей функции для полиномов Чебышёва-Лагерра [150].

## Приложение В

### Результаты для $\mathcal{T}_k^{s''s}$

Аналогично приложению А, факторы  $\mathcal{T}_k^{s''s}$ , входящие в (5.26), приведены для случая отрицательного заряда фермиона,  $\eta = -1$ , и могут быть получены с использованием волновых функций (1.12). Используется следующее обозначение:  $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}(q_{\perp}^2/(2\beta))$ .

1. В случае, когда  $j$  является скалярными током ( $k = S$ ), вычисления дают

$$\mathcal{T}_S^{--} = g_S j_S \mathcal{K}_3[(m_f + M_{\ell})(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}]; \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{T}_S^{-+} = -ig_S j_S \mathcal{K}_4[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_{\ell})\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{T}_S^{+-} = -ig_S j_S \mathcal{K}_4[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_{\ell})\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{B.3})$$

$$\mathcal{T}_S^{++} = g_S j_S \mathcal{K}_3[(m_f + M_{\ell})(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}]. \quad (\text{B.4})$$

2. В случае, когда  $j$  является псевдоскалярными током ( $k = P$ ), получим

$$\mathcal{T}_P^{--} = g_P j_P \mathcal{K}_4[2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + (m_f + M_{\ell})(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{T}_P^{-+} = ig_P j_P \mathcal{K}_3[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_{\ell})\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{T}_P^{+-} = ig_P j_P \mathcal{K}_3[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_{\ell})\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{T}_P^{++} = -g_P j_P \mathcal{K}_4[(m_f + M_{\ell})(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}]. \quad (\text{B.8})$$

3. В случае, когда  $j$  является векторным током ( $k = V$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{--} = & g_V [2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n, \ell} - \\ & - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \\ & - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n, \ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{-+} = & i g_V [\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n, \ell} + \\ & + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \\ & - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n, \ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{+-} = & -i g_V [\sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n, \ell} + \\ & + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \\ & - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n, \ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{++} = & g_V [2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n, \ell} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} - \\ & - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell} - \\ & - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n, \ell-1}] . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

4. В случае, когда  $j$  является псевдовекторным током ( $k = A$ ), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{--} = & -g_A[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}]; \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{-+} = & ig_A[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}]; \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{+-} = & -ig_A[\sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q + i(j_A \varphi q))}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\ & - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell}]; \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{++} = & -g_A[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & + \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Отметим, что полученные амплитуды для векторной и аксиально-векторной вершин, после возведения в квадрат и суммирования по поляризационным состояниям фермионов, согласуются с ранее полученными результатами в работах [29, 193, 194].

## Приложение Г

# Вычисление амплитуды рассеяния фотона на электронах замагниченной плазмы с излучением двух фотонов

Определим  $S$ -матричный элемент плазменного вклада, просуммированный по всем состояниям электронов и позитронов, с учетом соответствующих функций распределения, следующим образом:

$$\mathcal{S}_{pl} = \sum_{\ell, s} \int dn_p [\mathcal{S}_- f_-(p) + \mathcal{S}_+ f_+(p)]. \quad (\text{Г.1})$$

Здесь  $dn_p$  - элемент фазового объема

$$dn_p = \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2},$$

где  $L_y, L_z$  - параметры, определяющие объем квантования,  $V = L_x L_y L_z$ .  $S$ -матричные элементы  $\mathcal{S}_{\mp}$  описывают рассеяние фотона «вперед», с излучением двух фотонов, на электронах и позитронах соответственно, функции  $f_{\mp}(p)$  являются соответствующими функциями распределения. Суммирование в (Г.1) ведется по спинам и уровням Ландау плазменных электронов и позитронов.

В пределе сильного поля электроны и позитроны в плазме находятся на основном уровне Ландау,  $\ell = 0$ . Поэтому, для нахождения матричных элементов  $\mathcal{S}_{\mp}$  в этом пределе оказывается удобным пользоваться решениями уравнения Дирака (1.12) в этом пределе:

$$\Psi_{p,0}^{\eta}(X) = \frac{\beta^{1/4}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}E(E+m)L_y L_z}} e^{-i(EX_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} e^{-\xi^2/2} u_{\eta}(p_{\parallel}), \quad (\text{Г.2})$$

где  $E = \sqrt{p_z^2 + m^2}$ . Соответствующие биспинорные амплитуды имеют вид

$$u_{\eta}(p_{\parallel}) = \begin{pmatrix} (E+m)\phi_{\eta} \\ \eta p_z \phi_{\eta} \end{pmatrix}, \quad (\text{Г.3})$$

где  $\phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  и  $\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  описывают состояния электрона и позитрона со спином, направленным против и по полю соответственно.

Используя эти решения, получаем для  $S$ -матричного элемента, соответствующего диаграммам на рис. 3.2, следующее выражение

$$\mathcal{S}_{pl} = \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \sum_{i=1}^6 [\mathcal{S}_-^{(i)} f_-(p) + \mathcal{S}_+^{(i)} f_+(p)], \quad (\Gamma.4)$$

где  $\mathcal{S}_\mp^{(i)}$  обозначает матричный элемент рассеяния на электронах (позитронах) для  $i$ -той диаграммы. Учитывая, что в процессе рассеяния фотона вперед электроны (позитроны) плазмы не изменяют свое состояние (при этом биспиноры, входящие в решения (Г.2), образуют матрицу плотности), запишем, например,  $\mathcal{S}_-^{(1)}$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_-^{(1)} = & -\frac{ie^3 \sqrt{\beta/\pi}}{2E \sqrt{2\omega V 2\omega' V 2\omega'' V}} \int d^4x d^4y d^4z Sp\{[(p\gamma)_\parallel + m]\Pi_- \times \\ & \times (\varepsilon'\gamma)S(z, y)(\varepsilon''\gamma)S(y, x)(\varepsilon\gamma)\} e^{-i[(qx)-(q'z)-(q''y)]} \times \\ & \times e^{i(p(z-x))_\parallel} e^{-ip_y(z_2-x_2)} e^{-(\beta/2)[(z_1+p_y/\beta)^2+(x_1+p_y/\beta)^2]}. \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Здесь  $S(x, y)$  - пропагатор электрона в магнитном поле (формула (Б.7) приложения Б).

Производя в (Г.5) замену переменных  $Y = z - y$ ,  $Z = y - x$ , и интегрируя по  $x$ , получим для  $\mathcal{S}_-^{(1)}$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_-^{(1)} = & -\frac{ie^3(2\pi)^3 \delta(\omega - \omega' - \omega'') \delta(q_y - q'_y - q''_y) \delta(q_z - q'_z - q''_z)}{2E \sqrt{2\omega V 2\omega' V 2\omega'' V}} \times \\ & \times \int d^4Y d^4Z Sp\{[(p\gamma)_\parallel + m]\Pi_- (\varepsilon'\gamma)S(Y)(\varepsilon''\gamma)S(Z)(\varepsilon\gamma)\} \times \\ & \times e^{i[(q'+q'')Z+(q'Y)]} e^{ip_2(q_x-q'_x-q''_x)/\beta} e^{i(p(Y+Z))_\parallel} e^{-(\beta/4)[Y_\perp^2+Z_\perp^2+2(YZ)_\perp+2i(Y\varphi Z)]}, \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

где  $S(X)$  - трансляционно-инвариантная часть пропагатора, определяемая формулой (Б.8) приложения Б.

Остальные элементы  $\mathcal{S}_-^{(i)}$ , соответствующие диаграммам с перестановками фотонов, могут быть теперь легко получены из (Г.6). Замена  $p \rightarrow -p$  позволяет найти  $\mathcal{S}_+^{(i)}$  - матричные элементы рассеяния на позитронах. В общем случае вычисление  $S$  - матричного элемента при произвольных величинах импульсов частиц и магнитного поля является довольно сложной задачей. Подстановка пропагатора  $S(X)$  в формулу (Г.6) приводит к чрезвычайно громоздкому выражению в виде двукратного интеграла по собственному времени. Нахождение предела сильного поля из этого выражения представляется достаточно трудоемким. Более удобным при вычислениях оказывается использовать разложение пропагатора электрона по обратной величине магнитного поля. Для этого представим трансляционно-инвариантную часть пропагатора электрона  $\hat{S}(X)$  следующим образом [186]:

$$\hat{S}(X) = \hat{S}_-(X) + \hat{S}_+(X) + \hat{S}_\perp(X). \quad (\text{Г.7})$$

Здесь

$$\hat{S}_-(X) \simeq \frac{i\beta}{2\pi} \exp\left(-\frac{\beta X_\perp^2}{4}\right) \int \frac{d^2 p_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{(p\gamma)_\parallel + m}{p_\parallel^2 - m^2} \Pi_- e^{-i(pX)_\parallel}, \quad (\text{Г.8})$$

$$\hat{S}_+(X) \simeq -\frac{i}{4\pi} [-i(\gamma \partial / \partial X)_\parallel + m] \delta_\parallel^2(X) \Pi_+ \exp\left(\frac{\beta X_\perp^2}{4}\right) \Gamma\left(0, \frac{\beta X_\perp^2}{2}\right), \quad (\text{Г.9})$$

$$\hat{S}_\perp(X) \simeq -\frac{1}{2\pi} \delta_\parallel^2(X) \frac{(X\gamma)_\perp}{X_\perp^2} \exp\left(-\frac{\beta X_\perp^2}{4}\right), \quad (\text{Г.10})$$

где  $\delta_\parallel^2(X) = \delta(X_0) \delta(X_3)$ ,  $\Gamma(a, z)$  - неполная гамма функция:

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

При этом, как показывает анализ, вклады в первые два члена разложения  $S$  - матричного элемента по обратной величине магнитного поля будут давать только комбинации:  $\hat{S}_- \hat{S}_-$ ,  $\hat{S}_- \hat{S}_+$ ,  $\hat{S}_- \hat{S}_\perp$ ,  $\hat{S}_\perp \hat{S}_\perp$ .

Вычисление амплитуды можно значительно упростить, если преобразовать  $S$  матричные элементы, соответствующие электронным вкладам, к  $S$  матричным элементам, соответствующим вкладам позитронов. Преобразуем, например, матричный элемент  $\mathcal{S}_-^{(1)}$ , отвечающий первой диаграмме на рис. 3.2, к матричному элементу  $\mathcal{S}_+^{(6)}$  рассеяния на позитронах, соответствующего той же диаграмме, но с перестановкой фотонов  $\varepsilon_\alpha(q) \leftrightarrow \varepsilon_\alpha^*(q')$  и заменой  $p \rightarrow -p$ . Для этого проинтегрируем (Г.6) по  $d^4Y$  и  $d^4Z$  с учетом асимптотической формы пропагатора (Г.7). Получим в пределе  $\beta \gg q_\perp^2, q_\parallel^2$  для  $\mathcal{S}_-^{(1)}$  следующее выражение

$$\mathcal{S}_-^{(1)} = \frac{ie^3\beta(2\pi)^3\delta(\omega - \omega' - \omega'')\delta(q_y - q'_y - q''_y)\delta(q_z - q'_z - q''_z)}{4E\sqrt{2\omega V 2\omega' V 2\omega'' V}} \times e^{ip_y(q_x - q'_x - q''_x)/\beta} Sp \hat{\mathcal{A}}^{(1)}. \quad (\text{Г.11})$$

Здесь:

$$\hat{\mathcal{A}}^{(1)} = \hat{\mathcal{A}}_{--}^{(1)} + \hat{\mathcal{A}}_{-+}^{(1)} + \hat{\mathcal{A}}_{+-}^{(1)} + \hat{\mathcal{A}}_{-\perp}^{(1)} + \hat{\mathcal{A}}_{\perp-}^{(1)} + \hat{\mathcal{A}}_{\perp\perp}^{(1)}, \quad (\text{Г.12})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{--}^{(1)} &= [2\beta - (q_\perp)^2 - (q'_\perp)^2 + (q'\Lambda q) + i(q'\varphi q)] \times \\ &\times [(p\gamma)_\parallel + m](\varepsilon'\gamma)_\parallel \frac{(p\gamma)_\parallel + (q'\gamma)_\parallel + m}{(q')_\parallel^2 + 2(pq')_\parallel} \times \\ &\times (\varepsilon''\gamma)_\parallel \frac{(p\gamma)_\parallel + (q\gamma)_\parallel + m}{q_\parallel^2 + 2(pq)_\parallel} (\varepsilon\gamma)_\parallel \Pi_-, \end{aligned} \quad (\text{Г.13})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{-+}^{(1)} &= -[(p\gamma)_\parallel + m](\varepsilon'\gamma)_\parallel \frac{(p\gamma)_\parallel + (q'\gamma)_\parallel + m}{(q')_\parallel^2 + 2(pq')_\parallel} \times \\ &\times (\varepsilon''\gamma)_\perp [(p\gamma)_\parallel + (q\gamma)_\parallel + m](\varepsilon\gamma)_\perp \Pi_-, \end{aligned} \quad (\text{Г.14})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{+-}^{(1)} &= -[(p\gamma)_\parallel + m](\varepsilon'\gamma)_\perp [(p\gamma)_\parallel + (q'\gamma)_\parallel + m] \times \\ &\times (\varepsilon''\gamma)_\perp \frac{(p\gamma)_\parallel + (q\gamma)_\parallel + m}{q_\parallel^2 + 2(pq)_\parallel} (\varepsilon\gamma)_\parallel \Pi_-, \end{aligned} \quad (\text{Г.15})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{- \perp}^{(1)} &= -[(p\gamma)_{\parallel} + m](\varepsilon'\gamma)_{\parallel} \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q'\gamma)_{\parallel} + m}{(q')_{\parallel}^2 + 2(pq')_{\parallel}} \times \\ &\times \{(\varepsilon''\gamma)_{\perp} [(q\gamma)_{\perp} - (1/2)((q'\gamma)_{\perp} + i(q'\varphi\gamma))] (\varepsilon\gamma)_{\parallel} + \\ &+ (\varepsilon''\gamma)_{\parallel} [(q\gamma)_{\perp} - (1/2)((q'\gamma)_{\perp} + i(q'\varphi\gamma))] (\varepsilon\gamma)_{\perp}\} \Pi_{-}, \end{aligned} \quad (\text{Г.16})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{\perp -}^{(1)} &= -[(p\gamma)_{\parallel} + m] \{(\varepsilon'\gamma)_{\perp} [(q'\gamma)_{\perp} - (1/2)((q\gamma)_{\perp} - i(q\varphi\gamma))] (\varepsilon''\gamma)_{\parallel} + \\ &+ (\varepsilon'\gamma)_{\parallel} [(q'\gamma)_{\perp} - (1/2)((q\gamma)_{\perp} - i(q\varphi\gamma))] (\varepsilon''\gamma)_{\perp}\} \times \\ &\times \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q\gamma)_{\parallel} + m}{q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}} (\varepsilon\gamma)_{\parallel} \Pi_{-}, \end{aligned} \quad (\text{Г.17})$$

$$\hat{\mathcal{A}}_{\pm\pm}^{(1)} = \frac{1}{4} [(p\gamma)_{\parallel} + m] (\varepsilon'\gamma) [(\Lambda\gamma)_{\beta} + i(\gamma\varphi)_{\beta}] (\varepsilon''\gamma) \gamma_{\beta} (\varepsilon\gamma) \Pi_{-}. \quad (\text{Г.18})$$

Здесь индексы  $-$ ,  $+$  или  $\perp$  показывают, какая из комбинаций пропагаторов  $\hat{S}_{-}\hat{S}_{-}$ ,  $\hat{S}_{-}\hat{S}_{+}$ ,  $\hat{S}_{+}\hat{S}_{+}$  или  $\hat{S}_{\perp}\hat{S}_{\perp}$  дает вклад в соответствующую часть следа.

Аналогичным образом вычисляется матричный элемент  $\mathcal{S}_{+}^{(6)}$  рассеяния на позитронах. Для него имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{+}^{(6)} &= - \frac{ie^3\beta(2\pi)^3\delta(\omega - \omega' - \omega'')\delta(q_y - q'_y - q''_y)\delta(q_z - q'_z - q''_z)}{4E\sqrt{2\omega V 2\omega' V 2\omega'' V}} \times \\ &\times e^{ip_y(q_x - q'_x - q''_x)/\beta} Sp \hat{\mathcal{B}}^{(6)}, \end{aligned} \quad (\text{Г.19})$$

где  $\hat{\mathcal{B}}^{(6)}$  определяется аналогично (Г.12), при этом

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_{--}^{(6)} &= - [2\beta - (q_{\perp})^2 - (q'_{\perp})^2 + (q'\Lambda q) - i(q'\varphi q)] \times \\ &\times [(p\gamma)_{\parallel} - m](\varepsilon\gamma)_{\parallel} \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q\gamma)_{\parallel} - m}{q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}} \times \\ &\times (\varepsilon''\gamma)_{\parallel} \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q'\gamma)_{\parallel} - m}{(q')_{\parallel}^2 + 2(pq')_{\parallel}} (\varepsilon'\gamma)_{\parallel} \Pi_{-}, \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_{-+}^{(6)} &= [(p\gamma)_{\parallel} - m](\varepsilon\gamma)_{\parallel} [(p\gamma)_{\parallel} + (q\gamma)_{\parallel} - m] \times \\ &\times (\varepsilon''\gamma)_{\perp} \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q'\gamma)_{\parallel} - m}{(q')_{\parallel}^2 + 2(pq')_{\parallel}} (\varepsilon'\gamma)_{\perp} \Pi_{-}, \end{aligned} \quad (\text{Г.21})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}}_{+-}^{(6)} &= [(p\gamma)_{\parallel} - m](\varepsilon\gamma)_{\perp} \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q\gamma)_{\parallel} - m}{q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}} \times \\ &\times (\varepsilon''\gamma)_{\perp} [(p\gamma)_{\parallel} + (q\gamma)_{\parallel} - m] (\varepsilon'\gamma)_{\parallel} \Pi_{-}, \end{aligned} \quad (\text{Г.22})$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{B}}_{-+}^{(6)} &= [(p\gamma)_{\parallel} - m] \{ (\varepsilon\gamma)_{\perp} [(q'\gamma)_{\perp} - (1/2)((q\gamma)_{\perp} + i(q'\varphi\gamma))] (\varepsilon''\gamma)_{\parallel} + \\
&+ (\varepsilon\gamma)_{\parallel} [(q'\gamma)_{\perp} - (1/2)((q\gamma)_{\perp} + i(q'\varphi\gamma))] (\varepsilon''\gamma)_{\perp} \} \times \\
&\times \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q'\gamma)_{\parallel} - m}{(q')_{\parallel}^2 + 2(pq')_{\parallel}} (\varepsilon'\gamma)_{\parallel} \Pi_{-}, \tag{Г.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{B}}_{+-}^{(6)} &= [(p\gamma)_{\parallel} - m] (\varepsilon\gamma)_{\parallel} \frac{(p\gamma)_{\parallel} + (q\gamma)_{\parallel} - m}{q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}} \times \\
&\times \{ (\varepsilon''\gamma)_{\perp} [(q'\gamma)_{\perp} - (1/2)((q\gamma)_{\perp} - i(q\varphi\gamma))] (\varepsilon'\gamma)_{\parallel} + \\
&+ (\varepsilon''\gamma)_{\parallel} [(q'\gamma)_{\perp} - (1/2)((q\gamma)_{\perp} - i(q\varphi\gamma))] (\varepsilon'\gamma)_{\perp} \} \Pi_{-}, \tag{Г.24}
\end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{B}}_{++}^{(6)} = -\frac{1}{4} [(p\gamma)_{\parallel} - m] (\varepsilon\gamma)_{\gamma\beta} (\varepsilon''\gamma) [(\Lambda\gamma)_{\beta} + i(\gamma\varphi)_{\beta}] (\varepsilon'\gamma) \Pi_{-}. \tag{Г.25}$$

Произведя в (Г.19) над всеми  $\gamma$ -матрицами под знаком следа операцию зарядового сопряжения и используя свойства операторов  $\Pi_{\pm}$  из приложения Д, находим, что след от матриц  $\hat{\mathcal{A}}^{(1)}$  может быть преобразован к следу от матриц  $\hat{\mathcal{B}}^{(6)}$  так, что

$$\text{Sp} \hat{\mathcal{A}}^{(1)} = -\text{Sp} \hat{\mathcal{B}}^{(6)*}. \tag{Г.26}$$

Путем перестановки фотонов могут быть вычислены остальные  $S$ -матричные элементы, определяющие вклад плазмы в процесс расщепления фотона. Используя теперь соотношение (Г.26) и формулу (Г.4), легко показать, что все четные по внешнему полю (т.е. четные по  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$ ) слагаемые будут входить в  $S$ -матричный элемент (Г.4) в виде нечетных по  $\mu$  функций, а нечетные – в виде четных по  $\mu$  функций. Это утверждение согласуется с обобщением теоремы Фарри на случай замагниченной среды, рассмотренным в работе [26].

Поскольку рассеяние  $\gamma e^{\pm} \rightarrow \gamma \gamma e^{\pm}$  происходит без передачи 4-импульса плазме, то этот процесс физически проявляет себя как расщепление фотона с соответствующим законом сохранения всех четырех компонент энергии-импульса. Выражение (Г.5), описывающее рассеяние на одном электроне, содержит только три  $\delta$ -функции. Однако в  $S$ -матричном элементе (Г.4), учитывающем

рассеяние на всех электронах и позитронах плазмы, содержится интеграл по обобщенному импульсу  $p_y$ , который дает недостающую  $\delta$ -функцию. Тогда амплитуда, соответствующая плазменному вкладу, может быть определена обычным образом

$$\mathcal{S}_{pl} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^4(q - q' - q'')}{\sqrt{2\omega V 2\omega' V 2\omega'' V}} \mathcal{M}_{pl}. \quad (\Gamma.27)$$

## Приложение Д

### Свойства матриц $\Pi_{\pm}$

В системе координат, где вектор индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  направлен вдоль третьей оси, матрицы  $\Pi_{\pm}$ , входящие в выражение для пропагатора электрона (Б.5), могут быть записаны в следующем виде:

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2} [\mathbb{I} \mp \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma)] = \frac{1}{2} [\mathbb{I} \pm i\gamma_1\gamma_2] = \frac{1}{2} [\mathbb{I} \pm \Sigma_3], \quad (\text{Д.1})$$

и являются проекционными операторами, соответствующими электронным состояниям со спином, направленным соответственно вдоль и против направления магнитного поля. Операторы  $\Pi_{\pm}$  обладают рядом свойств, которые позволяют существенно упростить анализ и вычисление матричных элементов процессов в магнитном поле. Отметим их мультипликативные

$$\Pi_{\pm}\Pi_{\pm} = \Pi_{\pm}, \quad \Pi_{\pm}\Pi_{\mp} = 0, \quad (\text{Д.2})$$

и коммутационные свойства

$$\Pi_{\pm}\gamma_{\parallel\mu} = \gamma_{\parallel\mu}\Pi_{\pm}, \quad \Pi_{\pm}\gamma_{\perp\mu} = \gamma_{\perp\mu}\Pi_{\mp} \quad (\text{Д.3})$$

$$\Pi_{\pm}\gamma_5 = \gamma_5\Pi_{\pm}. \quad (\text{Д.4})$$

Следствием свойств (Д.2) и (Д.3) являются следующие соотношения

$$\Pi_{\pm}\gamma_{\mu}\Pi_{\pm} = \gamma_{\parallel\mu}\Pi_{\pm}, \quad \Pi_{\mp}\gamma_{\mu}\Pi_{\pm} = -\gamma_{\perp\mu}\Pi_{\pm}. \quad (\text{Д.5})$$

При вычислениях оказывается полезной следующая формула

$$\Pi_{\pm}\gamma_{\perp\mu}\gamma_{\perp\nu}\Pi_{\pm} = (-\Lambda_{\mu\nu} \pm i\varphi_{\mu\nu})\Pi_{\pm}, \quad (\text{Д.6})$$

которая позволяет вычислять следы произведений  $\gamma$ -матриц в матричных элементах только в продольном подпространстве. Ниже приводятся несколько та-

ких следов от четного числа  $\gamma$ -матриц

$$\begin{aligned}
\text{Sp}\{\Pi_{\pm}\} &= 2, & \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\Pi_{\pm}\} &= 2\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \\
\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel\rho}\gamma_{\parallel\sigma}\Pi_{\pm}\} &= 2(\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}_{\rho\sigma} + \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma}\tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}), & (Д.7) \\
\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_5\Pi_{\pm}\} &= \pm 2\tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \\
\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel\rho}\gamma_{\parallel\sigma}\gamma_5\Pi_{\pm}\} &= \pm 2(\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}\tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + \tilde{\varphi}_{\mu\nu}\tilde{\Lambda}_{\rho\sigma}).
\end{aligned}$$

След от нечетного числа  $\gamma$ -матриц, так же, как и в обычном четырехмерном пространстве, равен нулю.

Полезны и другие часто встречающиеся соотношения:

$$\begin{aligned}
\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\dots\Pi_{+}\} &= \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\dots\Pi_{-}\}, \\
\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\dots\gamma_5\Pi_{+}\} &= -\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\dots\gamma_5\Pi_{-}\}, \\
(\tilde{\varphi}\gamma)_{\mu}\Pi_{\pm} &= \mp\gamma_{\parallel\mu}\gamma_5\Pi_{\pm}, \\
\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel\rho} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}\gamma_{\parallel\rho} + \tilde{\Lambda}_{\nu\rho}\gamma_{\parallel\mu} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho}\gamma_{\parallel\nu}, \\
\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel}^{\mu} &= 2, & \gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel}^{\mu} &= 0, & (Д.8) \\
\gamma_{\parallel\mu}\gamma_{\parallel\nu}\gamma_{\parallel\rho}\gamma_{\parallel}^{\mu} &= 2\gamma_{\parallel\rho}\gamma_{\parallel\nu}.
\end{aligned}$$

Легко показать, что свертка двух  $\gamma_{\parallel}$ -матриц, между которыми находится любое нечетное число  $\gamma_{\parallel}$ -матриц, обращается в ноль.

## Список литературы

1. Ryu D., Schleicher D. R. G., Treumann R. A. et al. Magnetic fields in the large-scale structure of the universe // *Space Science Reviews*. 2012. Vol. 166, no. 1-4. P. 1–35.
2. Бисноватый-Коган Г. Взрыв вращающейся звезды как механизм сверхновой // *Астрон. журн.* 1970. Т. 47. С. 813–816.
3. Бисноватый-Коган Г. С. Физические вопросы теории звездной эволюции. Москва: Наука, 1989. 487 с.
4. Kouveliotou C. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20. // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 235–237.
5. Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 510. P. L115–118.
6. Gavriil F. P., Kaspi V. M., Woods P. M. Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous x-ray pulsar // *Nature*. 2002. Vol. 419. P. 142–144.
7. Ibrahim A. I., Safi-Harb S., Swank J. H. et al. Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 574. P. L51–L55.
8. Ibrahim A. I., Swank J. H., Parke W. New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // *Astrophys. J.* 2003. Vol. 584. P. L17–L22.
9. Olausen S. A., Kaspi V. M. The McGill magnetar catalog // *Astrophys. J. Suppl.* 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.
10. Duncan R. C., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts // *Astrophys. J.* 1992. Vol. 392, no. 1. P. L9–L13.
11. Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. II. Quiescent neutrino, X-Ray, and Alfvén wave emission //

- Astrophys. J. 1996. Vol. 473. P. 322–342.
12. Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1995. Vol. 275. P. 255–300.
  13. Thompson C., Duncan R. C. The giant flare of 1998 august 27 from SGR 1900+14. II. Radiative mechanism and physical constraints on the source // Astrophys. J. 2001. Vol. 561, no. 2. P. 980–1005.
  14. Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R. Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // Astrophys. J. 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.
  15. Goldreich P., Julian W. H. Pulsar electrodynamics // Astrophys. J. 1969. Vol. 157. P. 869–880.
  16. Beloborodov A. M., Thompson C. Corona of magnetars // Astrophys. J. 2007. Vol. 657, no. 2. P. 967–993.
  17. Yakovlev D. G., Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Haensel P. Neutrino emission from neutron stars // Phys. Rep. 2001. Vol. 354. P. 1–155.
  18. Sokolov A. A., Zhukovskii V. C., Nikitina N. S. Quantum transitions of relativistic electrons in a superstrong magnetic field // Physics Letters A. 1973. Vol. 43. P. 85–86.
  19. Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовые процессы в сильном внешнем поле. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 192 с.
  20. Lai D. Matter in strong magnetic fields // Reviews of Modern Physics. 2001. Vol. 73, no. 3. P. 629–662.
  21. Harding A. K., Lai D. Physics of strongly magnetized neutron stars // Rept. Prog. Phys. 2006. Vol. 69. P. 2631–2724.
  22. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.
  23. Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak processes in external active media //

- Springer Tracts Mod. Phys. 2013. Vol. 252. P. pp 1–271.
24. Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А. Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // УФН. 1997. Т. 167, № 3. С. 241–267.
  25. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. Москва: Наука, 1979. 528 с.
  26. Фрадкин Е. С. Метод функций Грина в теории квантованных полей и квантовой статистике // Тр. ФИАН СССР. 1965. Т. 29. С. 7–138.
  27. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика, ч.2. Москва: Наука, 1978. 448 с.
  28. Frank I. M., Tamm I. Coherent visible radiation of fast electrons passing through matter // C. R. Acad. Sci. URSS. 1937. Vol. 14. P. 109–114.
  29. Latal H. G. Cyclotron radiation in strong magnetic fields // Astrophys. J. 1986. Vol. 309. P. 372–382.
  30. Erber T., Latal H. G. Unified radiation formulae for classical and quantum electrodynamics // European Journal of Physics. 2003. Vol. 24, no. 1. P. 67–79.
  31. Semionova L., Leahy D., Paez J. Polarization in cyclotron radiation in strong magnetic fields // Research in Astronomy and Astrophysics. 2010. Vol. 10, no. 10. P. 1023–1040.
  32. Байер В. Н., Катков В. М. Рождение пары нейтрино при движении электрона в магнитном поле // ДАН СССР. 1966. Т. 171, № 2. С. 313–316.
  33. Potekhin A. Y., Pons J. A., Page D. Neutron stars - cooling and transport // Space Sci. Rev. 2015. Vol. 191, no. 1-4. P. 239–291.
  34. Чобан Э. А., Иванов А. Н. Рождение лептонных пар высокоэнергетическими нейтрино в поле сильной электромагнитной волны // ЖЭТФ. 1969. Т. 56, № 1. С. 194–200.
  35. Ритус В. И. Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем // Тр. ФИАН СССР сб. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. 1979. Т. 111. С. 5–151.

36. Никишов А. И. Проблемы интенсивного внешнего поля в квантовой электродинамике // Тр. ФИАН СССР сб. Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле. 1979. Т. 111. С. 152–271.
37. Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Лысов Б. А. Рождение электрон - позитронной пары нейтрино в магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1983. № 8. С. 30–34.
38. Книжников М. Ю., Татаринцев А. В. Рождение электрон - позитронной пары нейтрино в постоянном внешнем поле // Вестн. МГУ. Физ., астроном. 1984. Т. 25, № 3. С. 26–30.
39. Borisov A. V., Ternov A. I., Zhukovsky V. C. Electron-positron pair production by a neutrino in an external electromagnetic field // Phys. Lett. 1997. Vol. B318, no. 3. P. 489–491.
40. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Neutrino energy and momentum loss through the process  $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$  in a strong magnetic field // Phys. Lett. 1997. Vol. B394, no. 1,2. P. 123–126.
41. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Нейтринное рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле // Ядерная физика. 1997. Т. 60, № 11. С. 2038–2047.
42. Борисов А. В., Заморин Н. Б. Рождение электрон - позитронной пары в распаде массивного нейтрино в постоянном внешнем поле // Ядерная физика. 1999. Т. 62, № 9. С. 1647–1656.
43. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Rumyantsev D. A. Lepton pair production by high-energy neutrino in an external electromagnetic field // Mod. Phys. Lett. 2000. Vol. A15, no. 8. P. 573–578.
44. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Румянцев Д. А. Нейтринное рождение лептонных пар во внешнем электромагнитном поле // Ядерная физика. 2002. Т. 65, № 2. С. 303–306.
45. Скобелев В. В. Резонансный механизм фоторождения аксионов на замагниченном электронном газе // ЖЭТФ. 2007. Т. 132, № 5. С. 1121–1126.

46. Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Школьников Ю. Е. О резонансном рождении аксионов в магнитосфере магнитара // Письма в журн. эксперим. и теор. физ. 2009. Т. 90, № 9. С. 668–671.
47. Herold H. Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields // Phys. Rev. 1979. Vol. D19, no. 10. P. 2868–2875.
48. Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. III Electron-photon interactions // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 799–824.
49. Daugherty J. K., Harding A. K. Compton scattering in strong magnetic fields // Astrophys. J. 1986. Vol. 309. P. 362–371.
50. Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G. et al. Compton scattering in ultrastrong magnetic fields: numerical and analytical behavior in the relativistic regime // Astrophys. J. 2000. Vol. 540. P. 907–922.
51. Gonthier P. L., Baring M. G., Eiles M. T. et al. Compton scattering in strong magnetic fields: Spin-dependent influences at the cyclotron resonance // Phys. Rev. 2014. Vol. D90, no. 4. P. 043014.
52. Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J. Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // Phys. Rev. 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.
53. Андреев М., Михеев Н. В., Нарынская Е. Н. Дисперсия нейтрино в зарядово-симметричной плазме // ЖЭТФ. 2010. Т. 137, № 2. С. 259–267.
54. Гвоздев А. А., Осокина Е. В. Нейтринные процессы во внешнем магнитном поле в формализме матрицы плотности // ТМФ. 2012. Т. 170, № 3. С. 423–447.
55. Баталин И. А., Шабад А. Е. Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 3. С. 894–900.
56. Tsai W. Y. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields // Phys. Rev. 1974. Vol. D10, no. 8. P. 2699–2702.
57. Shabad A. E. Photon dispersion in a strong magnetic field // Ann. Phys.

- (N.Y.). 1975. Vol. 90, no. 1. P. 166–195.
58. Скобелев В. В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1975. № 10. С. 142–143.
  59. Шабад А. Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”. 1988. Т. 192. С. 5–152.
  60. Ритус В. И. Метод собственных функций и массовый оператор в квантовой электродинамике постоянного поля // ЖЭТФ. 1975. Т. 78, № 2. С. 1560–1583.
  61. Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А. Мнимая часть массового оператора электрона в постоянном поле при конечной температуре и плотности // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, № 4. С. 929–935.
  62. Гальцов Д. В., Никитина Н. С. Фотонейтринные процессы в сильном поле // ЖЭТФ. 1972. Т. 62, № 6. С. 2008–2012.
  63. Скобелев В. В. О реакциях  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и  $\nu \rightarrow \gamma\nu$  в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1976. Т. 71, № 4. С. 1263–1267.
  64. DeRaad Jr. L. L., Milton K. A., Hari Dass N. D. Photon decay into neutrinos in a strong magnetic field // Phys. Rev. 1976. Vol. D14, no. 12. P. 3326–3334.
  65. Gvozdev A. A., Mikheev N. V., Vassilevskaya L. A. The magnetic catalysis of the radiative decay of a massive neutrino in the standard model with lepton mixing // Phys. Lett. 1992. Vol. B289, no. 1,2. P. 103–108.
  66. Василевская Л. А., Гвоздев А. А., Михеев Н. В. Распад массивного нейтрино  $\nu_i \rightarrow \nu_j\gamma$  в скрещенном поле // Ядерная физика. 1994. Т. 57, № 1. С. 124–127.
  67. Gvozdev A. A., Mikheev N. V., Vassilevskaya L. A. The radiative decay of a massive neutrino in the external electromagnetic fields // Phys. Rev. 1996. Vol. D54, no. 9. P. 5674–5685.
  68. Скобелев В. В. Распад массивного нейтрино в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1995. Т. 108, № 1. С. 3–13.

69. Zhukovsky V. C., Eminov P. A., Grigoruk A. E. Radiative decay of a massive neutrino in the Weinberg - Salam model with mixing in a constant uniform magnetic field // *Mod. Phys. Lett.* 1996. Vol. A11, no. 39-40. P. 3119–3126.
70. D’Olivo J. C., Nieves J. F., Pal P. B. Cherenkov radiation by massless neutrinos // *Phys. Lett.* 1996. Vol. B365, no. 1-4. P. 178–184.
71. Ioannisian A. N., Raffelt G. G. Cherenkov radiation by massless neutrinos in a magnetic field // *Phys. Rev.* 1997. Vol. D55, no. 11. P. 7038–7043.
72. Gvozdev A., Mikheev N., Vassilevskaya L. Resonance neutrino bremsstrahlung  $\nu \rightarrow \nu\gamma$  in a strong magnetic field // *Phys. Lett.* 1997. Vol. B410, no. 2-4. P. 211–215.
73. Kuznetsov A. V., Mikheev N., Vassilevskaya L. A. Photon splitting  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  in an external magnetic field // *Phys. Lett.* 1998. Vol. B427, no. 1,2. P. 105–108.
74. Василевская Л. А., Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Индуцированное магнитным полем нейтрино-фотонное  $\nu\nu\gamma$ -взаимодействие // *Ядерная физика.* 1999. Т. 62, № 4. С. 715–722.
75. Боровков М. Ю., Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Однопетлевая амплитуда перехода  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  во внешнем электромагнитном поле // *Ядерная физика.* 1999. Т. 62, № 9. С. 1714–1722.
76. Папанян В. О., Ритус В. И. Трехфотонное взаимодействие в интенсивном поле // *Тр. ФИАН СССР “Проблемы квантовой электродинамики интенсивного поля”.* 1986. Т. 168. С. 120–140.
77. Adler S. L., Schubert C. Photon splitting in a strong magnetic field: recalculation and comparison with previous calculations // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1695 – 1698.
78. Baier V. N., Milstein A. I., Shaisultanov R. Z. Photon splitting in a very strong magnetic field // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1691 – 1695.
79. Байер В. Н., Мильштейн А. И., Шайсултанов Р. Ж. Расщепление фотона в сверхсильном магнитном поле // *ЖЭТФ.* 1997. Т. 111, № 1. С. 52–62.
80. Wilke C., Wunner G. Photon splitting in strong magnetic fields: asymptotic

- approximation formulae vs. accurate numerical results // *Phys. Rev.* 1997. Vol. D55, no. 2. P. 997–1000.
81. Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Photon splitting above the pair creation threshold in a strong magnetic field // *Phys. Lett.* 1998. Vol. B434, no. 1. P. 67–73.
82. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Чистяков М. В. Расщепление фотона на два фотона в сильном магнитном поле // *Ядерная физика.* 1999. Т. 62, № 9. С. 1638–1646.
83. Ruderman M. A., Sutherland P. G. Theory of pulsars - Polar caps, sparks, and coherent microwave radiation // *Astrophys. J.* 1975. Vol. 196. P. 51–72.
84. Клепиков Н. П. Излучение фотонов и электрон-позитронных пар в магнитном поле // *ЖЭТФ.* 1954. Т. 26, № 1. С. 19–34.
85. Sokolov A. A., Ternov I. M., Borison A. V., Zhukovskii V. C. Creation of electron-positron pairs and their annihilation in a superstrong magnetic field // *Physics Letters A.* 1974. Vol. 49. P. 9–10.
86. Соколов А. А., Тернов И. М., Борисов А. В., Жуковский В. Ч. Рождение и аннигиляция электронно-позитронных пар в сверхсильном магнитном поле // *Известия ВУЗов. Физика.* 1975. № 4. С. 65–71.
87. Erber T. High-energy electromagnetic conversion processes in intense magnetic fields // *Rev. Mod. Phys.* 1966. Vol. 38. P. 626–659.
88. Shabad A. E., Usov V. V. Gamma-quanta capture by magnetic field and pair creation suppression in pulsars // *Nature.* 1982. Vol. 295. P. 215–217.
89. Усов В. В., Шабад А. Е. Светопозитроний в магнитосфере пульсара // *Письма в журн. эксперим. и теор. физ.* 1985. Т. 42, № 1. С. 17–20.
90. Lyubarsky Y. E. On the X-ray spectra of soft gamma repeaters // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2002. Vol. 332, no. 1. P. 199–204.
91. Лоскутов Ю. М. Эффекты направленности нейтринного излучения в сильном магнитном поле и его возможные следствия // *Письма в журн. эксперим. и теор. физ.* 1984. Т. 39, № 9. С. 438–440.

92. Лоскутов Ю. М. Индуцированная поляризация электронов. Асимметрия углового распределения нейтрино, генерируемых в магнитном поле // ТМФ. 1985. Т. 65, № 1. С. 141–150.
93. Григорьев А. В., Студеникин А. И., Тернов А. И. Нейтрино в веществе и внешних полях // Ядерная физика. 2009. Т. 72, № 4. С. 760–765.
94. Studenikin A. New bounds on neutrino electric millicharge from limits on neutrino magnetic moment // Europhys.Lett. 2014. Vol. 107. P. 21001.
95. Giunti C., Studenikin A. Neutrino electromagnetic interactions: a window to new physics // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87. P. 531.
96. Carlo G., Kouzakov K. A., Yu-Feng L. et al. Electromagnetic neutrinos in laboratory experiments and astrophysics // Annalen der physik. 2016. Vol. 528, no. 1-2. P. 198–215.
97. Studenikin A. I. Electromagnetic neutrino: a short review // Nuclear and Particle Physics Proceedings. 2016. Vol. 273-275. P. 1711–1718.
98. Kouzakov K. A., Studenikin A. I. Electromagnetic properties of massive neutrinos in low-energy elastic neutrino-electron scattering // Physical Review D. 2017. Vol. 95, no. 5. P. 055013–1–055013–9.
99. Пинаев В. С. Некоторые процессы рождения нейтринных пар в звездах // ЖЭТФ. 1964. Т. 45, № 2. С. 548–554.
100. Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Эминов П. А. Испускание нейтринных пар электроном в сверхсильном магнитном поле // Известия ВУЗов. Физика. 1978. № 3. С. 110–114.
101. Yakovlev D. G., Tschaeppe R. Synchrotron neutrino pair radiation in neutron stars // Astronomische Nachrichten. 1981. Vol. 302. P. 167–176.
102. Yakovlev D. G., Tschaeppe R. Erratum - Synchrotron neutrino-pair radiation in neutron stars // Astronomische Nachrichten. 1982. Vol. 303. P. 218.
103. Kaminker A. D., Kaurov A. A., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. Thermal emission of neutron stars with internal heaters // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2014. Vol. 442, no. 4. P. 3484–3494.

104. Peccei R. D., Quinn H. R. Constraints imposed by CP conservation in the presence of instantons // *Phys. Rev.* 1977. Vol. D16. P. 1791–1797.
105. Бережигани З. Г., Сахаров А. С., Хлопов М. Ю. О реликтовом фоне космических аксионов // *Ядерная физика.* 1992. Т. 55, № 7. С. 1918–1933.
106. Raffelt G. G. *Stars as laboratories for fundamental physics.* Chicago: University of Chicago Press, 1996. 664 p.
107. Primakoff H. Photoproduction of neutral mesons in nuclear electric fields and the mean life of the neutral meson // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 81. P. 899.
108. Dicus D. A., Kolb E. W., Teplitz V. L., Wagoner R. V. Astrophysical bounds on the masses of axions and Higgs particles // *Phys. Rev.* 1978. Vol. D18. P. 1829–1851.
109. Sikivie P. Detection rates for 'invisible' axion searches // *Phys. Rev.* 1985. Vol. D32, no. 11. P. 2988–2991. [Erratum: *Phys. Rev.*D36,974(1987)].
110. van Bibber K., McIntyre P. M., Morris D. E., Raffelt G. G. Design for a practical laboratory detector for solar axions // *Phys. Rev.* 1989. Vol. D39, no. 8. P. 2089–2099.
111. Raffelt G. G., Stodolsky L. Mixing of the photon with low-mass particles // *Phys. Rev.* 1988. Vol. D37, no. 5. P. 1237–1249.
112. Ансельм А. А. Осцилляции арион-фотон в постоянном магнитном поле // *Ядерная физика.* 1985. Т. 42, № 6. С. 1480–1483.
113. Anselm A. A. Experimental test for arion  $\rightarrow$  photon oscillations in a homogeneous constant magnetic field // *Phys. Rev.* 1988. Vol. D37, no. 7. P. 2001–2004.
114. Vorobyev P. V., Kolokolov I. V., Fogel V. F. Magnetic media as a source and detector of axions // *Particle World.* 1990. Vol. 1, no. 6. P. 163–167.
115. Della Valle F., Ejlli A., Gastaldi U. et al. The PVLAS experiment: measuring vacuum magnetic birefringence and dichroism with a birefringent Fabry-Perot cavity // *European Physical Journal C.* 2016. Vol. 76. P. 24.
116. Brubaker B. M., Zhong L., Gurevich Y. V. et al. First results from a microwave

- cavity axion search at  $24 \mu \text{ eV}$  // *Physical Review Letters*. 2017. Vol. 118, no. 6. P. 061302.
117. Branca A., Bonaldi M., Cerdonio M. et al. Search for an ultralight scalar dark matter candidate with the AURIGA detector // *Physical Review Letters*. 2017. Vol. 118, no. 2. P. 021302.
118. Banerjee D., Burtsev V., Cooke D. et al. Search for invisible decays of sub-GeV dark photons in missing-energy events at the CERN SPS // *Physical Review Letters*. 2017. Vol. 118, no. 1. P. 011802.
119. Борисов А. В., Гришина В. Ю. Комптоновское рождение аксионов на электронах в постоянном внешнем поле // *ЖЭТФ*. 1996. Т. 110, № 5. С. 1575–1588.
120. Mikheev N. V., Parkhomenko A. Ya., Vassilevskaya L. A. Axion in an external electromagnetic field // *Phys. Rev.* 1999. Vol. D60. P. 035001.
121. Mikheev N. V., Vasilevskaya L. A. Electromagnetic catalysis of the radiative decay of the axion // *Phys. Lett.* 1997. Vol. B410. P. 207–210.
122. Mikheev N. V., Vasilevskaya L. A. Axion decay  $a \rightarrow f\bar{f}$  in a strong magnetic field // *Phys. Lett.* 1997. Vol. B410. P. 203–206.
123. Mikheev N. V., Ovchinnikov O. S., Vassilevskaya L. A.  $a \rightarrow e^+e^-$  decay in a model with induced coupling to leptons // *Mod. Phys. Lett.* 1998. Vol. A13. P. 321–326.
124. Борисов А. В., Сизин П. Е. Распространение аксионов в сильно замагниченной среде // *ЖЭТФ*. 1999. Т. 115, № 1. С. 3–11.
125. Борисов А. В., Сизин П. Е. Излучение аксионов при рассеянии электронов на флюксоидах в сверхпроводящем ядре нейтронной звезды // *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2000. № 4. С. 3–5.
126. Борисов А. В., Сизин П. Е. Комптоновское излучение аксионов сильно замагниченным вырожденным релятивистским электронным газом // *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2002. № 4.

- C. 13–16.
127. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Москва: Наука, 1989. 728 с.
  128. Kuznetsov A. V., Romyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude  $jf \rightarrow j'f'$  in a magnetized medium // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.
  129. Suleimanov V., Werner K. Importance of Compton scattering for radiation spectra of isolated neutron stars with weak magnetic fields // Astron. Astrophys. 2007. P. 661–668.
  130. Chistyakov M. V., Romyantsev D. A. Compton effect in strongly magnetized plasma // Int. J. Mod. Phys. 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.
  131. Kennett M. P., Melrose D. B. Neutrino emission via the plasma process in a magnetized plasma // Phys. Rev. 1998. Vol. D58. P. 093011 (1–17).
  132. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. Москва: Наука, 1971. 484 с.
  133. Липунов В. М. Астрофизика нейтронных звезд. Москва: Наука, 1987. 294 с.
  134. Kuznetsov A. V., Romyantsev D. A., Savin V. N. Creation of electron-positron pairs at excited Landau levels by neutrino in a strong magnetic field // Int. J. Mod. Phys. 2014. Vol. A29, no. 26. P. 1450136.
  135. Kuznetsov A. V., Romyantsev D. A., Savin V. N. Neutrino processes  $\nu\bar{\nu} \rightarrow e^-e^+$  and  $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$  in a strong magnetic field // J. Phys. Conf. Ser. 2016. Vol. 675, no. 3. P. 032019.
  136. Kuznetsov A. V., Romyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude  $jf \rightarrow j'f'$  in a magnetized medium (extended version). 2013. [arXiv:hep-ph/1312.5719](https://arxiv.org/abs/1312.5719).
  137. Кузнецов А. В., Румянцев Д. А., Савин В. Н. Нейтринное рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле произвольной интенсивности // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова. Серия Естественные и технические науки. 2014. № 1. С. 7–13.

138. Кузнецов А. В., Румянцев Д. А., Шленев Д. М. Обобщённая древесная амплитуда рассеяния в замагниченной среде // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова. Серия Естественные и технические науки. 2015. № 1. С. 16–26.
139. Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Savin V. N. Neutrino production of  $e^+e^-$  pairs in a strong magnetic field // Proceeding of the Seventeenth Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics. Particle Physics at the Year of Light. Moscow, Russia, August 20-26, 2015. 2015. P. 525–527.
140. Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Savin V. N. Neutrino production of electron-positron pairs at excited Landau levels in a strong magnetic field // Quarks'2014. Proc. of 18-th Int. Sem. «Quarks'2014», Suzdal, Russia, 2014. Ed. by P. S. Satunin, e.a. Inst. Nucl. Res., Moscow. 2015. P. 315–321.
141. Окунь Л. Лептоны и кварки. Москва: Наука, 1990. 346 с.
142. Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field // Physical Review. 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.
143. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Москва: Физматгиз, 1959. 656 с.
144. Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. Москва: Наука, 1966. 228 с.
145. Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 755–774.
146. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.
147. Bhattacharya K., Pal P. B. Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // Pramana J. Phys. 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.
148. Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I. On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // J. Phys. 2011. Vol. A44. P. 255301 (1–13).
149. Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД,

2001. 784 с.
150. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.
  151. Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние фотон-нейтринных процессов на остывание магнитара // *ЖЭТФ*. 2008. Т. 134, № 4. С. 627–636.
  152. Румянцев Д. А. Резонансный механизм рождения  $e^+e^-$  пар в сильном магнитном поле // *Ядерная физика*. 2013. Т. 76, № 12. С. 1605–1609.
  153. Bulik T., Miller M. C. Spectral effects of the vacuum resonance in soft gamma-ray repeaters // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1997. Vol. 288, no. 3. P. 596–608.
  154. Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Процессы с участием фотонов в сильно замагниченной плазме // *Ядерная физика*. 2009. Т. 72, № 2. С. 334–339.
  155. Chistyakov M. V., Romyantsev D. A., Stus' N. S. Photon splitting and Compton scattering in strongly magnetized hot plasma // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D86. P. 043007.
  156. Chistyakov M. V., Romyantsev D. A. The Compton effect in a strongly magnetized plasma // *Quarks'2006. Proc. 14-th Int. Sem. «Quarks'2006»*, St.-Petersburg, Repino, Russia, 2006. Eds. S.V. Demidov et al. *Inst. Nucl. Res. RAS. Moscow. Vol. 2.* 2007. P. 255–263.
  157. Chistyakov M. V., Romyantsev D. A. Electromagnetic Processes In Strongly Magnetized Plasma // *Quarks'2008. Proc. of 15-th Int. Sem. «Quarks'2008»*, Sergiev Posad, Russia, 2008. Eds. by V. A. Duk, e.a. *Inst. Nucl. Res. RAS. Moscow.* 2010. P. 75–84.
  158. Chistyakov M. V., Romyantsev D. A., Shlenev D. M. Photon splitting in a strongly magnetized, charge-asymmetric plasma // *EPJ Web Conf.* 2016. Vol. 125. P. 04017 (1–11).
  159. Перес Рохас У. Поляризационный оператор электрон-позитронного газа в постоянном внешнем магнитном поле // *ЖЭТФ*. 1979. Т. 76, № 1. С. 3–17.
  160. Peres Rojas H., Shabad A. E. Absorption and dispersion of electromagnetic

- eigenwaves of electron-positron plasma in a strong magnetic field // *Ann. Phys.* (N.Y.). 1982. Vol. 138. P. 1–35.
161. Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Фоторождение нейтрино на электроде в плотной замагниченной среде // *ЖЭТФ*. 2014. Т. 146, № 2. С. 289–296.
162. Peres Rojas H., Shabad A. E. Polarization of relativistic electron and positron gas in a strong magnetic field. Propagation of electromagnetic waves // *Ann. Phys.* (N.Y.). 1979. Vol. 121, no. 2. P. 432–464.
163. Adler S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. // *Annals of Physics*. 1971. Vol. 67. P. 599–647.
164. Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние сильно замагниченной плазмы на процесс расщепления фотона // *ЖЭТФ*. 2005. Т. 128, № 4. С. 740–751.
165. Suleimanov V., Hambaryan V. V., Potekhin A. Y. et al. Radiative properties of highly magnetized isolated neutron star surfaces and approximate treatment of absorption features in their spectra // *Astron. Astrophys.* 2010. Vol. 511. P. A111–A165.
166. Potekhin A. Y., Suleimanov V. F., van Adelsberg M., Werner K. Radiative properties of magnetic neutron stars with metallic surfaces and thin atmospheres // *Astron. Astrophys.* 2012. Vol. 546. P. A121–A135.
167. Poutanen J., Mushtukov A. A., Suleimanov V. F. et al. A reflection model for the cyclotron lines in the spectra of X-ray pulsars // *Astrophys. J.* 2013. Vol. 777. P. 115–123.
168. Михеев Н. В., Чистяков М. В. Затухание фотона в результате рождения электрон-позитронной пары в сильном магнитном поле // *Письма в журн. эксперим. и теор. физ.* 2001. Т. 73, № 12. С. 726–730.
169. Adler S. L., Bahcall J. N., Callan C. G., Rosenbluth M. N. Photon splitting in a strong magnetic field // *Physical Review Letters*. 1970. Vol. 25. P. 1061–1065.
170. Bialynicka-Birula Z., Bialynicka-Birula I. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field //

- Phys.Rev. D. 1970. no. 10. P. 2341–2345.
171. Папанян В. О., Ритус В. И. Поляризация вакуума и расщепление фотонов в интенсивном поле // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 6. С. 2231–2241.
172. Stoneham R. J. Photon splitting in the magnetised vacuum // J. Phys. 1979. Vol. A12, no. 11. P. 2187–2203.
173. Mentzel M., Berg D., Wunner G. Photon splitting in strong magnetic fields // Phys. Rev. 1994. Vol. D50. P. 1125–1139.
174. Weise J. I. Photon splitting in the electromagnetic vacuum // Phys. Rev. 2004. Vol. D59. P. 105017 (1–16).
175. Harding A. K., Baring M. G., Gonthier P. L. Photon-splitting cascades in gamma-ray pulsars and the spectrum of PSR 1509-58 // Astrophys. J. 1997. Vol. 476, no. 1. P. 246–260.
176. Baring M. G., Harding A. K. Radio-quiet pulsars with ultrastrong magnetic fields // Astrophys. J. Lett. 1998. Vol. 507, no. 1. P. L55–L58.
177. Малофеев В. М., Малов О. И., Теплых Д. А., и др. Радиоизлучение от двух аномальных рентгеновских пульсаров // Астрон. ж. 2005. Т. 82, № 3. С. 273–280.
178. Malofeev V. M., Malov O. I., Teplykh D. A. et al. Radio emission from two anomalous X-ray pulsars // Astronomy Reports. 2005. Vol. 49, no. 3. P. 242–249.
179. Istomin Ya. N., Sobyenin D. N. Electron-positron plasma generation in a magnetar magnetosphere // Astron. Lett. 2007. Vol. 33. P. 660–672.
180. Bulik T. Photon splitting in strongly magnetized plasma // Acta Astronomica. 1998. Vol. 48. P. 695–710.
181. Elmfors P., Skagerstam B.-S. Thermally induced photon splitting // Phys. Lett. 1998. Vol. B427. P. 197–205.
182. Gies H. QED effective action at finite temperature: Two loop dominance // Phys. Rev. 2000. Vol. D61. P. 085021 (1–34).
183. Martinez Resco J. M., Valle Basagoiti M. A. Matter induced vertices for pho-

- ton splitting in a weakly magnetized plasma // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 016006 (1–14).
184. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Взаимодействие нейтрино с сильно замагниченной электрон-позитронной плазмой // *ЖЭТФ*. 2000. Т. 118, № 4. С. 863–876.
185. Weldon H. A. Covariant calculations at finite temperature: The relativistic plasma // *Phys. Rev.* 1982. Vol. D26. P. 1394–1433.
186. Chistyakov M. V., Mikheev N. V. Photon - neutrino interactions in strong magnetic field // *Mod. Phys. Lett.* 2002. Vol. A17, no. 39. P. 2553–2562.
187. Mikheev N. V., Parkhomenko A. Y., Vassilevskaya L. A. Magnetic-field influence on radiative axion decay into photons of the same polarization // *Ядерная физика*. 2000. Т. 63, № 6. С. 1122–1125.
188. Усов В. В., Шабад А. Е. О распаде гамма-квантов изгибающего излучения вблизи поверхности пульсара // *Письма в Астрон. журн.* 1983. Т. 9. С. 401–404.
189. Usov V. V. Photon splitting in the superstrong magnetic fields of pulsars // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 572, no. 1. P. L87–L90.
190. Nagel W. Cyclotron line formation in the accretion column of an X-ray pulsar // *Astrophys. J.* 1980. Vol. 236. P. 904–910.
191. Burrows A., Lattimer J. M. The birth of neutron stars // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 307. P. 178–196.
192. Prakash M., Bombaci I., Prakash M. et al. Composition and structure of proton-neutron stars // *Phys. Rep.* 1997. Vol. 280. P. 1–77.
193. Kaminker A. D., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. et al. Neutrino emissivity from  $e^-$  synchrotron and  $e^-e^+$  annihilation processes in a strong magnetic field: General formalism and nonrelativistic limit // *Phys. Rev.* 1992. P. 3256–3264.
194. Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Yakovlev D. G. et al. Neutrino emissivity from  $e^-e^+$  annihilation in a strong magnetic field: Hot, nondegenerate plasma // *Phys. Rev.* 1992. P. 4133–4139.

195. Каминкер А. Д., Яковлев Д. Г. Аннигиляция и синхротронное излучение нейтринных пар электронами и позитронами в нейтронных звездах // *Астрономический Журнал*. 1994. Т. 71, № 6. С. 910–915.
196. Itoh N., Mutoh H., Nikita A., Kohyama Y. Neutrino energy loss in stellar interiors. IV - Plasma neutrino process for strongly degenerate electrons // *Astrophys. J.* 1992. Vol. 395, no. 2. P. 622–631.
197. Борисов А. В., Керимов Б. К., Сизин П. Е. Слабый и электромагнитный механизмы фоторождения нейтринных пар в сильно замагниченном электронном газе // *Ядерная физика*. 2012. Т. 75, № 11. С. 1379–1386.
198. Скобелев В. В. Комптоновский механизм генерации нейтрино и аксионов на эффективно-двумерном замагниченном ферми-газе // *ЖЭТФ*. 2000. Т. 117, № 6. С. 1059–1066.
199. Бисноватый-Коган Г. С., Чечеткин В. М. Неравновесные оболочки нейтронных звезд, их роль в поддержании рентгеновского излучения и нуклеосинтезе // *Усп. физ. наук*. 1979. Т. 127, № 2. С. 263–296.
200. Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. et al. Neutrino photo-production on electron in dense magnetized medium // *Quarks'2014. Proc. of 18-th Int. Sem. «Quarks'2014», Suzdal, Russia, 2014. Ed. by P. S. Satunin, e.a. Inst. Nucl. Res., Moscow. 2015. P. 322–329.*
201. Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A. Influence of the photon - neutrino processes on magnetar cooling // *Quarks'2008. Proc. of 15-th Int. Sem. «Quarks'2008», Sergiev Posad, Russia, 2008. Eds. by V. A. Duk, e.a. Inst. Nucl. Res. RAS. Moscow. 2010. P. 382–389.*
202. Chistyakov M. V., Mikheev N. V. Radiative neutrino transition  $\nu \rightarrow \bar{\nu} \gamma$  in strongly magnetized plasma // *Phys. Lett.* 1999. Vol. B467. P. 232–237.
203. Гвоздев А. А., Огнев И. С. Процессы взаимодействия нейтрино с нуклонами оболочки коллапсирующей звезды с сильным магнитным полем // *ЖЭТФ*. 2002. Т. 121, № 6. С. 1219–1234.

204. Mikheev N. V., Narynskaya E. N. Neutrino electron processes in a dense magnetized plasma // *Mod. Phys. Lett.* 2000. Vol. A15. P. 1551–1556.
205. Weldon H. A. Simple rules for discontinuities in finite temperature Field Theory // *Phys. Rev.* 1983. Vol. D28. P. 2007–2037.
206. Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А. Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // *ЖЭТФ*. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.
207. Mikheev N. V., Romyantsev D. A., Shkol'nikova Yu. E. Resonant  $\gamma \rightarrow a$  transition in magnetar magnetosphere // *Quarks'2010. Proc. of 16-th Int. Sem. «Quarks'2010»*, Kolomna, Russia, 2010. Ed. by V. A. Matveev, e.a. Inst. Nucl. Res., Moscow. 2010. P. 364–369.
208. Romyantsev D. A. Resonant electron-positron pairs production in magnetar polar cap // *Quarks'2012. Proc. of 17-th Int. Seminar «Quarks'2012»*, Yaroslavl, Russia, 2012. Ed. by V.A. Khlebnikov, e.a. Inst. Nucl. Res., Moscow. Vol. 2. 2013. P. 222–228.
209. Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Школьникова Ю. Е. Резонансный  $\gamma \rightarrow a$  переход в магнитосфере магнитара // *Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова. Серия Естественные и технические науки*. 2009. № 1. С. 25–28.
210. Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Школьникова Ю. Е. Резонансный механизм рождения аксионов в магнитосфере магнитара // *Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова. Серия Естественные и технические науки*. 2011. № 1. С. 43–47.
211. Румянцев Д. А., Стусь Н. С. Резонансное рождение электрон-позитронных пар в полярной шапке магнитара // *Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова. Серия Естественные и технические науки*. 2011. № 2. С. 32–37.
212. Василевская Л. А., Михеев Н. В., Овчинников О. С., Пархоменко А. Я. Индуцированное взаимодействие аксиона с электронами во внешнем маг-

- нитном поле // Ядерная физика. 1999. Т. 62, № 9. С. 1662–1667.
213. Mikheev N. V., Narynskaya E. N. Field-induced interaction of a pseudoscalar particle with photon in a magnetized  $e^-e^+$  plasma // Mod. Phys. Lett. 2006. Vol. A21. P. 433–444.
214. Mikheev N. V., Raffelt G., Vassilevskaya L. A. Axion emission by magnetic field induced conversion of longitudinal plasmons // Phys. Rev. 1998. Vol. D58. P. 055008 (1–5).
215. Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Meszaros P., Alexander S. G. Radiative widths and splitting of cyclotron lines in superstrong magnetic fields // Astrophys. J. 1991. Vol. 380. P. 541–549.
216. Baier V. N., Katkov V. M. Pair creation by a photon in a strong magnetic field // Phys. Rev. 2007. Vol. D75, no. 7. P. 073009.
217. Kuznetsov A. V., Okrugin A. A. The exact electron propagator in a magnetic field as the sum over Landau levels on a basis of the Dirac equation exact solutions // Int. J. Mod. Phys. 2011. Vol. A26. P. 2725–2733.
218. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization // Physical Review. 1951. Vol. 82, no. 5. P. 664–679.